
ARCH LIBRARIES
06909542 4







Eigenschaften einiger merkwürdigen Punkte des geradlinigen Dreiecks und mehrerer durch sie bestimmten Linien und Figuren.

Eine analytisch-trigonometrische Abhandlung

von

Karl Wilhelm Feuerbach,
der Philosophie Doktor.

Mit einer Vorrede

von

Karl Buzengeiger,
ordentlichem Professor der Mathematik an der großherz. badischen Universität zu Freiburg.

Nürnberg, 1822.
Bei Riegel und Wießner.

Vorrede.

Die Mathematik läßt sich aus zwei sehr von einander verschiedenen Gesichtspunkten betrachten: so erscheint sie einmal als Wissenschaft, und das anderemal als Kunst. In der ersten erblickt man ihre Methode, eine Reihe von Wahrheiten zu verbinden, und in ein System zu vereinigen, so daß jede einzelne aus der vorhergegangenen auf eine einfache und evidente Art erkannt werden kann. In der zweiten müssen die Methoden und die Kunstgriffe dargelegt seyn, die sich anwenden lassen, um etwas Gesuchtes erfinden zu können. Um sie von der ersten Seite kennen zu lernen, giebt es unter ältern und neuern kein besseres Werk als Euklids Elemente. Die geometrischen analytischen Werke von Euklides und Apollonius, wovon wir freilich die Originale nicht selber, wohl aber die trefflichen Wiederherstellungen von Robert Simson besitzen, vorzüglich aber die noch vorhandenen Schriften Diophants sind die ältesten Produkte mathematischen Scharfsinns, aus welchen der Anfänger die Mathematik von der andern Seite kennen lernen kann. Um geometrische Aufgaben zu lösen, gebrauchten die Griechen eine Methode, die sie analytische hießen, und deren Erfindung insgemein Plato zugeschrieben wird.

Sie besteht im Allgemeinen darin, daß man die Aufgabe als gelöst sich denkt, und dann rückwärts erforscht, auf was für einfachere Fragen sie sich zurückführen lasse, und so fortgeht, bis man auf eine kommt, deren Auflösung man bereits kennt. Von Euklides haben wir noch eine sehr schöne und systematisch geordnete Sammlung solcher Aufgaben, welche dieser Kunst als Grundlage dienen, unter dem Namen Data. Da es aber oft sehr schwer ist, die gegebenen Stücke einer solchen Frage so mit einander in Verbindung zu bringen, daß sich brauchbare Folgen daraus ergeben, so ist das Studium der Werke jener großen Geometer von großer Wichtigkeit, um die Methoden und Kunstgriffe kennen zu lernen, die angewendet werden müssen, um solche Schwierigkeiten überwinden zu können. Diophants Schriften betreffen einen andern Zweig der Mathematik; sie bestehen aus einer zahlreichen Sammlung arithmetischer Fragen von einer ganz besondern Natur, und er bemühte sich in ihren Auflösungen die Kunstgriffe und Methoden auseinander zu setzen, durch deren Hilfe Fragen dieser Art aufgelöst werden können. Jeder, der diese Schriften von Diophant studirt, wird den Scharfsinn und den Reichthum an Hilfsmitteln, den ihm sein Genie darbot, bewundern, und wird das Vergnügen haben zu bemerken, daß er sich dadurch und durch die Vortheile, die der neuere Zustand der Arithmetik und Algebra noch hinzufügt, geschickt gemacht habe, allgemeinere und schwerere Aufgaben dieser Art auflösen zu können. Andere Werke der Griechen, welche nicht blos Sammlungen von Aufgaben sind, wie z. B. die beiden Bücher über Kugel und Cylinder von Archimedes, und die Kegelschnitte von Apollonius u. s. w. haben, obschon ihre Verfasser den darin vorkommenden Aufgaben jedesmal die Analysis beigefügt, doch nur die Tendenz einzelne Theile der Geometrie als Wissenschaft darzustellen.

Archimedes scheint die Elemente Euklids haben ergänzen zu wollen, und Apollonius suchte die krummen Linien, die durch den Schnitt eines Kegels entspringen, so abzuhandeln wie Euklides den Kreis behandelte, und das Urtheil der Kenner ist einstimmig, daß sein Werk in Ansehung des Plans, Anordnung der Sätze und der Ausführung der Beweise ein Meisterstück in der wissenschaftlichen Darstellung sey, deren die Geometrie fähig ist. Die Schriften der neuern Analysten sind in Ansehung dieser beiden Gesichtspunkte durchaus gemischt, weil in diesen die Theoreme nicht nur bewiesen, und die Aufgaben nur aufgelöst erscheinen dürfen, sondern weil schlechterdings die Art und Weise angegeben seyn muß, wie man zu denselben gelangt ist.

Aus dem bisherigen wird es leicht erklärlich seyn, wie Mathematik auf zwei verschiedene Weisen studirt und getrieben werden kann. Derjenige, der Empfänglichkeit hat für die Schönheit der wissenschaftlichen Darstellung deren die Mathematik fähig ist, der mathematische Werke auch blos in dieser Rücksicht studirt, und sich begnügt die Erfindungen Anderer verstehen zu lernen, wird sich viele Kenntnisse erwerben. Versteht ein solcher hernach diese gut zu ordnen und an einander zu reihen, so kann er, auch ohne die Wissenschaft zu erweitern, ein sehr achtungswürdiger Mathematiker seyn, und großen Nutzen stiften. Mathematiker dieser Art waren mehrentheils gute Lehrer für den öffentlichen und allgemeinen Unterricht, auch haben wir solchen die meisten guten Lehrbücher zu verdanken. Wolff, Karsten, Burja u. a. m. dürften wohl in diese Klasse zu rechnen seyn. Nach einer ganz andern Weise wird hingegen der mehr ins höhere strebende Geist und der tiefer forschende Kopf diese Wissenschaft studiren. Dieser wird sich nicht blos begnügen, diese Lehren zu verstehen, und ihre

Urheber zu bewundern, sondern er wird die ursprünglichen Grundideen, die sie zu Entdeckungen geführt haben, zu erforschen suchen, um sie bei ähnlichen Untersuchungen benützen und das Gebiet dieser Wissenschaft selber erweitern zu können. Es ist gewiß, daß nur derjenige, der von der Natur zum Studium der Mathematik begünstigt ist, diesen Weg einschlagen kann, und daß er für jeden, der sich nicht des so zufälligen Geschenkes an natürlichem Genie erfreuen kann, höchst anstrengend und ermüdend ist. Sehr viel Genie besiegt alle Hindernisse leicht; minderes kann durch Fleiß und das Studium der Werke grosser Meister viele überwinden. In jedem Fall ist der Privatunterricht oder auch nur der Umgang eines Meisters die kräftigste und stärkste Unterstützung, und es können mehrjährige eigene Anstrengungen durch diesen glücklichen Zufall erspart werden. Euler und Lagrange gehören beide zu den größten mathematischen Genies; jener hatte aber das Glück frühzeitig den Unterricht und die nähere Bekanntschaft des berühmten Joh. Bernoulli zu genießen, was unstreitig seine frühe und vielseitige Ausbildung bewirkte. Dieser hingegen entwickelte sich später und weniger vielseitig, weil er nicht durch ähnlichen glücklichen Zufall begünstigt, seine mathematische Ausbildung ganz allein durch mühsames und anstrengendes Selbststudium bewerkstelligen mußte. — Aber auch bei dieser Art Mathematik zu studiren und zu treiben, ist es sehr nöthig, in frühen Zeiten den Anfang mit dem Studium der gründlichen und strengen geometrischen Werke der Griechen, mit Euklides, Archimedes und den Kegelschnitten des Apollonius zu beginnen, nicht allein, um von der Mathematik, was sie als Wissenschaft seyn kann, einen deutlichen Begriff zu erhalten, den doch jeder Mathematiker haben soll, sondern auch, um nachahmungswürdige Muster in Ansehung der Klarheit, Deutlichkeit, Kürze und Prä-

cision im Vortrage mathematischer Gegenstände vor Augen zu haben. Für jeden, der diese Studien nicht in frühern Zeiten, ehe er die Reize des Selbstforschens kennen lernt, unternimmt, steht zu befürchten, daß er sie nie mehr nachholen werde, und die Folge davon ist, daß er einem strengen, wissenschaftlichen Vortrag nie mehr den rechten Geschmack abgewinnen kann, am Ende denselben für überflüssig ansieht, und das Lesen solcher Werke, weil er sich nicht die Gewandheit dazu erworben hat, langweilig findet. Je größer das Genie ist, desto wahrscheinlicher wird es, daß dieses so eintreffe. Hieraus muß man sich die geringschätzenden Urtheile von Cartesius über Vietas und Anderer Werke erklären, wenn man zuvor das weggenommen hat, was aus seiner Neigung überhaupt von Anderen herabwürdigend zu urtheilen hergeleitet werden muß. Eben so auch Keplers Urtheile über Apollonius Kegelschnitte und die Beweise Archimeds in den zwei Büchern über Kugel und Cylinder, ob er gleich die Methoden desselben in seiner Nova stereometria doliorum etc. auf die genievollste Art auf die Körper, welche durch Umdrehung einer ebenen Kurve, vorzüglich eines Kreises, um eine beliebige Axe entspringen, ausdehnte, und dadurch der Urheber der nachher von Cavalerius in ein System gebrachten Methodus indivisibilium wurde. Noch viele von den größten Mathematikern ließen sich hier anführen, aber unter allen bekannte und bereute nur Newton öffentlich das in frühern Zeiten versäumte Studium der griechischen Geometer. Daher kommt es auch, daß nur sehr wenige der großen Mathematiker für den allgemeinen und öffentlichen Unterricht gute Lehrer waren, da im Gegentheil viele derselben im Privatunterricht ausgezeichnete Schüler zogen.

Jeder der sich den Wissenschaften widmen will, soll zu seiner phi

schen Ausbildung neben den philosophischen Wissenschaften Mathematik in der ersten Beziehung studiren, und in den Vorträgen für solche Zuhörer dürfen nur nebenbei Begriffe von dem, was sie als Kunst ist, gegeben werden. Diejenigen aber, welche dieser Wissenschaft allein sich widmen wollen, oder welche sie zum Behuf irgend eines technischen Faches, oder zum Studium der Astronomie, Physik u. s. w. studiren, dürfen sich damit nicht begnügen, sondern sie müssen sie als Hilfsmittel zu schweren Untersuchungen und zur Erfindung zu benutzen wissen. Denn gar oft ist das Weiterschreiten in diesen Fächern in einer genauen Verbindung mit den Fortschritten der Mathematik. Ob es aber möglich sey, diese Wissenschaft über ihren gegenwärtigen Zustand noch auf eine bedeutende Art weiter zu erheben, ist nicht so leicht bejahend oder verneinend zu beantworten. Wenn man bedenkt, daß es in der gegenwärtigen Zeit so wenig an ausgezeichneten Köpfen fehlt, als es in der kurz vorangegangenen an dergleichen gefehlt hat, und jene dennoch keine der frühern gleiche Epoche herbeiführen konnten, so möchte man leicht das letzte aussprechen. Allein man muß auch bedenken, daß aus der letzten Hauptepoche, nämlich der Erfindung der Differential- und Integralrechnung, so vieles nachzuholen, und so manche Lücke auszufüllen, auch so manches zu berichtigen und auseinander zu setzen übrig blieb, was den Scharfsinn der größten Köpfe so sehr in Anspruch nahm, daß es scheint, es habe schon deßwegen auch nicht einmal der Saame zu einer ganz neuen Idee entstehen können. Dabei entstand nach und nach die große Ausbildung und Verfeinerung des Kalkuls, wogegen seine Unbeholfenheit zu Leibnizens und Bernoulli's Zeiten sehr absticht; und überhaupt möchte wohl das, was die letzten Zeiten hervorgebracht haben, nicht geringer, vielleicht größer, nur weniger glän-

zend seyn, als das, was jenes, in der Geschichte der Mathematik so berühmte, Zeitalter hervorgebracht hat. —

Um sich einigermassen vorstellen zu können, was man von dieser Wissenschaft noch erwarten dürfte, muß man die verschiedenen Epochen, die sie gehabt hat, und was durch sie hervorgebracht worden ist, in Erwägung ziehen. Nach dem Vortrefflichen, was Euklides, Aristäus und Apollonius in der Geometrie geliefert hatten, zog zuerst Archimedes durch die Methoden, die er anwandte, krumme Linien zu quadriren, und von krummen Flächen begrenzte Körper, sowohl ihren körperlichen Inhalt als auch ihre Oberflächen zu bestimmen, eine neue Epoche herbei. Sehr merkwürdig ist hierbei noch, daß er die ersten Begriffe von der Summirung unendlicher Reihen gab, und solche benutzte. Die Griechen selber machten keine weitere Anwendung mehr von diesen Ideen, dieses war, wie schon erwähnt worden, einem Mathematiker eines viel spätern Zeitalters vorbehalten. Aber einen Hauptgedanken von ganz anderer Art, durch den auf eine neue und besondere Weise das Feld der Mathematik erweitert wurde, sind wir den Griechen noch schuldig, nämlich den, die Kreisbogen mit den ihnen zugehörigen Sehnen zu vergleichen, und für diese Vergleichung Tafeln aufzustellen. Sie sahen, daß hierdurch die Aufgaben, wo aus drei gegebenen Stücken eines Dreiecks dasselbe bestimmt werden soll, statt durch Konstruktion, durch Rechnung gelöst werden können. Kurz es bildete sich dadurch nicht allein die ebene, sondern auch die sphärische Trigonometrie, und es entsprang für die Geodäsie der wichtige Vortheil, daß alle die Irrthümer, die aus den Fehlern beim Zeichnen entspringen, nun beseitigt wurden. Späterhin wurde man dadurch auf die Begriffe der Sinuse, Kosinuse, Tangenten u. s. w. und der unzähligen wichtigen Relationen zwi-

schen ihnen, sowie auch auf ihren höchst merkwürdigen Zusammenhang mit andern Funktionen geführt. Auch waren die Griechen noch die Erfinder der Methode, die Auflösung gewisser arithmetischer Fragen auf Gleichungen zurückzuführen, und solche, wenn sie nicht über den zweiten Grad giengen, aufzulösen. Nach dem Wiederaufleben der Wissenschaften war diese Kunst einer der ersten mathematischen Gegenstände, den man mit Liebe pflegte. Man nannte sie Coss und nachher Algebra. Unsere Zahlbezeichnung ist eines der schönsten Denkmale menschlichen Scharfsinns, und doch war sie nebst ihrem Algorithmus der Erweiterung jener Kunst hinderlich. Weil nämlich, wenn man bei Auflösung einer Aufgabe ihre Bedingungen mit den gegebenen Zahlen und der unbekannten ausführt, um die Gleichung zu erhalten, und dann diese auflöst, man dem für die unbekannte Größe gefundenen Werth nicht ansehen kann, wie er aus den gegebenen Zahlen entsprungen ist, indem diese durch die gemachten arithmetischen Operationen eigentlich verschwunden sind. Man erhält also eben jedesmal nur, die Auflösung eines individuellen Beispiels der Aufgabe. Deßwegen bezeichnete sich Vieta, um die Auflösung einer solchen Aufgabe ganz allgemein zu haben, und die Regel zu sehen, nach welcher die unbekannte Größe aus den bekannten gefunden werden kann, die Zahlen durch Buchstaben, und verrichtete die arithmetischen Operationen mit denselben durch bloße Bezeichnung. Dieses ist der eigentliche Gedanke, welcher der Buchstabenrechnung zum Grunde liegt, und es ist zu verwundern, daß man ihn in keinem der Handbücher über Algebra, angeführt findet, da doch der Anfänger nothwendig erfahren muß, warum man auf den seltsam scheinenden Einfall gekommen ist, beim Rechnen sich der Buchstaben zu bedienen. Dieser Gedanke war übrigens von einer solchen Wichtigkeit, daß mit

ihm für die Mathematik eine neue Periode anfängt. Nepers Idee von Logarithmen war etwas künstlich, und die Berechnung seiner Tafeln erforderte einen festen Muth; gewiß mußte er von dem großen Nutzen derselben fest überzeugt seyn, um sein schwieriges Unternehmen so muthig auszuführen, wie er es that. Es brachte auch wirklich eine gänzliche Reform im rechnenden Theil der Mathematik hervor. Aber erst späterhin entdeckte man den merkwürdigen Zusammenhang dieser Größen mit andern. — Sehr folgenreich war auch die schöne Bemerkung von Newton, daß wenn man in der Entwicklung einer ganzen Potenz einer zweitheiligen Größe für den Exponenten einen Bruch, wie $\frac{1}{m}$, setzt, dieser Ausdruck in eine unendliche Reihe übergeht, welche der m^{ten} Wurzel der zweitheiligen Größe entspricht, und daß also gebrochene Exponenten bei Potenzen auch einen Sinn haben, der aber außerhalb des Grundbegriffes von Potenz liegt. Noch früher hatte aber Cartesius einen großen Gedanken, wodurch die Auflösung der schwersten geometrischen Fragen der Algebra unterworfen, und auf die Auflösung der Gleichungen zurückgeführt wurden. Dieser Gedanke besteht darin: die Lage der einzelnen Punkte einer Kurve durch Abscissen und Ordinaten zu bestimmen, und zwischen diesen beiden Größen eine Gleichung zu bestimmen. Da diese Gleichung ganz durch die Natur der krummen Linie bestimmt ist, so muß auch umgekehrt die Natur der Kurve in dieser Gleichung enthalten seyn. Er entwikkelt diesen Gedanken sehr schön in seiner Geometrie, und von der Zeit an, als dieses Werk erschien, erhielten die geometrischen Untersuchungen eine ganz andere Richtung, und die rein geometrischen Betrachtungen wurden vernachlässigt. Späterhin erweiterten Leibniz und Joh. Bernoulli diesen Gedanken, indem sie noch sowohl die Bewegung, als auch die Veränderung einer Kurve, die entspringt,

wenn sich zugleich noch einer oder mehrere ihrer Parameter verändern, durch Gleichungen ausdrückten. Aber dieser Gedanke wurde erst noch um mehr als ein halbes Jahrhundert später durch Monge weiter benutzt. Man gab dieser Lehre den Namen analytische Geometrie. Wir kennen darüber nur französische Lehrbücher, die bei aller Vortrefflichkeit die Sache doch nicht so umfassen, wie es geschehen könnte und sollte. — Eine geraume Zeit vor Leibniz und Newton bemerkte man, daß wenn fx irgend einen algebraischen Ausdruck der veränderlichen Größe x bedeutet, und man läßt x um eine beliebige Größe w zunehmen, so daß dieser Ausdruck zu $f(x+w)$ wird, alsdann immer der Ueberschuß $f(x+w) - fx$ durch w theilbar sey, so daß also $\frac{f(x+w) - fx}{w}$, wenn man auch w Null setzt, (obwohl bei dieser Bezeichnung Zähler und Nenner, indem die Division durch w nur bezeichnet wird, verschwindet) ebenfalls eine algebraische Funktion von x sey, und daß diese Funktion eine geometrische Beziehung habe, und die Lage der Tangente an dem Punkte der Kurve, dessen Abscisse x und Ordinate fx ist, bestimmen. Wenn fx eine blos algebraische Funktion von x ist, so ist immer die neue Funktion leicht daraus zu bestimmen; wenn aber fx eine transcendentale ist, so ist dieses nicht so leicht. Leibniz und Newton wiesen zuerst, wie diese neue abgeleitete Funktion in jedem Fall nach sichern Regeln sich aus jeder vorgegebenen ableiten lasse, d. h. sie lehrten jede Funktion differentiiren. Zugleich bemerkten beide, daß, wenn Fx, ϕx den der Abscisse x zugehörigen Raum oder den Bogen der Kurve bedeuten, die aus diesen abgeleiteten Funktionen sich durch fx und ihre abgeleitete bestimmen lassen. Da sie nun zugleich auch sahen, daß eine abgeleitete Funktion vollkommen durch ihre ursprüngliche bestimmt ist, und also auch umgekehrt, diese aus jener bestimmt seyn

müsse, so brachten sie die Quadratur und Rektifikation der Kurven auf die Rechnung der ursprünglichen Funktionen aus ihren abgeleiteten, d. i. auf die Integralrechnung. Diese Ansichten wurden nun auch auf die Komplanation und Kubatur der Körper, sowie auf die Rektifikation der Kurven von doppelter Krümmung ausgedehnt. Leibniz sahe ferner noch, daß auch die höhern abgeleiteten Funktionen eine geometrische Beziehung haben, uud daß von ihnen die Bestimmung der berührenden Kurven abhänge. Späterhin sahe man auch, daß das allgemeine und wichtige Hauptproblem der Analysis, nämlich die Verwandlung der Funktionen in Reihen von ihnen ganz abhängig sey. Aber nicht auf die Geometrie und Analysis allein haben diese Funktionen einen so großen Einfluß, sondern er erstreckt sich sogar auf die Mechanik. Wenn ein körperlicher Punkt durch den Antrieb irgend einer Kraft, deren Stärke und Richtung beide entweder konstant oder veränderlich sind, genöthigt ist, eine Kurve zu beschreiben, und man bezieht ihre Punkte auf drei rechtwinklichte Koordinaten, und sieht solche als Funktionen der Zeit an, die vom Anfang der Wirkung der Kraft verflossen ist, so stellen die ersten abgeleiteten Funktionen derselben die Geschwindigkeiten vor, nach welchen der Punkt nach der Richtung dieser Koordinaten in diesem Zeitpunkt getrieben wird; durch die zweite aber wird die Stärke der Kraft nach derselben Richtung gemessen. Wegen diesen vielen Beziehungen ist es nun leicht begreiflich, warum die Erfindung der abgeleiteten Funktionen einen Erfolg erzeugen mußte, als keine der frühern Erfindungen einen hervorbrachte. Dieses sind nun meiner Meinung nach die Hauptepochen, welche die Geometrie und Analysis bis jetzt gehabt haben; alles das schöne, wichtige und scharfsinnige, was mit ihnen erzeugt wurde, gehört zur Aufzählung nicht hieher.

Wenn man sich so die Fortschritte der reinen Mathematik vorstellt, so ergeben sich mancherlei Betrachtungen. Es drängt sich der Gedanke herbei, ob es nicht möglich wäre, etwas dem aufgezählten Aehnliches zur Erweiterung der Wissenschaft hinzu zu fügen. Aber was kann man sich der Cartesianischen Geometrie oder analytischen Geometrie Aehnliches denken? Aus jeder Funktion lassen sich wohl auf unzählige Arten andere ableiten, was können aber für solche noch für Beziehungen auf Geometrie übrig bleiben, da die Differentialrechnung schon alle Hauptaufgaben umfaßt? Nur ein besonderer Einfluß auf die Analysis könnte also durch sie statt finden, und das könnte doch vielleicht wichtig genug werden. Schon früher haben mehrere Mathematiker geglaubt, die Analysis könne durch die Aufnahme neuer transcendenter Funktionen, wie z. B. der elliptischen Bogen und Berechnung von Tafeln für dieselben, einen neuen Schwung erhalten; sie führten für ihre Meinung die Fortschritte dieser Wissenschaft durch die Aufnahme der Circular- und logarithmischen Funktionen an, und hatten vorzüglich die vielen Integralformen, die sich auf diese Funktionen zurückführen lassen, im Auge. Allein so groß auch die Zahl der Integralformeln ist, die Lexell und Euler auf die Rektifikation der Ellipse zurückführten, so sind sie doch nicht so sehr in die Mathematik eingreifend, daß die große Mühe, welche die Berechnung solcher Tafeln erfordert, durch den Nutzen ersetzt würde. Durch die Kreisfunktionen wurde die Trigonometrie hergestellt, und die logarithmischen Funktionen gaben die unschätzbare Abkürzung in der Rechnung, und ehe man etwas Aehnliches für die elliptischen Bogen ausfindig macht, werden Tafeln dafür nur eine sehr beschränkte Anwendung haben. Es ist aber vielleicht doch möglich, daß man bei der Berechnung unendlicher Reihen, welche oft so schwie-

rig ist, daraus Nutzen ziehen könnte. — Es gibt vielleicht noch nicht bemerkte und noch nicht gehörig beachtete analytische Operationen, und dabei Funktionen, die in Beziehung auf sie etwas Aehnliches leisten, wie die Logarithmen auf die arithmetischen Verrichtungen; aber man kann jetzt freilich nichts sagen, was diesen dunkeln Begriff erhellte, denn wenn man das könnte, so wäre die Sache auch da. Doch sind schon Versuche dieser Art gemacht worden, die Fakultäten und die kombinatorischen Operationen gehören hieher. Erste sind bis jetzt offenbar von den Analysten zu wenig beachtet worden. Eine große Menge von Integralien, deren nümerische Berechnung durch die gewöhnliche Verwandlung in Reihen sich nicht ausführen läßt, kann durch dieselbe sehr einfach bewerkstelligt werden, und ihre Relationen geben neue Hilfsmittel, Reihen für solche Integralien zu finden, die einen beliebigen Grad der Annäherung gewähren. Letzte sind bis jetzt von sehr Wenigen von der rechten Seite angesehen worden, und das Wichtige und Schöne ist durch einen höchst widerlichen und untauglichen Zeichenwust versteckt und entstellt worden. Und so ist man eben auf dem Punkt, gestehen zu müssen, daß man zwar keinen Begriff habe, wie die Mathematik noch eine Epoche haben könne, die in ihrer Wirkung einer der bisherigen gleiche; allein das war wohl immer der Fall, ehe eine neue eintrat. Aber das ist gewiß, daß jede folgende schwerer werden muß, denn diese Wissenschaft gleicht in ihren Fortschritten den Sammlungen natürlicher Gegenstände; im Anfang kann eine solche schnell vermehrt werden, jemehr sie aber anwächst, desto langsamer geht es damit. Immer bleibt aber dieses Studium an sich gut, edel und fürs ganze Leben vom wichtigsten Einfluß; daher soll dieses Niemand abhalten, sich demselben zu widmen. Zudem bleibt das Gebiet dieser Wissenschaft immer doch unerschöpflich,

und es läßt sich noch unendlich viel machen, das des Dankes der Zeitgenossen und der Nachkommen werth ist, ob es jetzt gleich nicht so leicht seyn kann, etwas sehr Wichtiges hervorzubringen, als es vor einem Jahrhundert war. Ich glaube dieses nicht besser belegen zu können, als wenn ich mich auf die nachstehende Abhandlung berufe. Das ebene Dreieck ist die einfachste geometrische Figur, und von dem ersten Ursprung der Geometrie bis auf die jetzigen Zeiten haben die Geometer sich bestrebt, seine Eigenschaften zu erforschen, ohne diese Quelle erschöpfen zu können, wie eben diese Abhandlung zeigt, welche eine ziemliche Reihe der merkwürdigsten und schönsten hiehergehörigen Sätze enthält. Da übrigens der Herr Verfasser mein mehrjähriger Zuhörer gewesen ist, so enthalte ich mich alles weiteren Lobes, und begnüge mich nur zu bemerken, daß die Art, wie er seinen Gegenstand behandelt hat, einen sehr systematischen Kopf beweise, und dabei noch zu erwähnen, daß er sich eben so gut an weit höhere Gegenstände hätte wagen können.

Freiburg, den 16. März 1822.

Buzengeiger.

Erster Abschnitt.

Von den Mittelpunkten der Kreise, welche die drei Seiten eines Dreiecks berühren.

§. 1.

Bekanntlich sind für jedes beliebige Dreieck ABC vier unterschiedene, seine drei Seiten berührende Kreise möglich, von welchen nur einer innerhalb, die übrigen aber ausserhalb des Dreiecks liegen. Der erste innerhalb berührende oder einbeschriebene Kreis berührt alle drei Seiten des Dreiecks selbst und befindet sich in den Ebenen aller drei Winkel desselben zugleich. Jeder der drei letzten hingegen, das ist, jeder ausserhalb berührende Kreis berührt nur Eine der drei Seiten selbst und die Verlängerungen der beiden andern, und befindet sich in der Ebene desjenigen Winkels, welcher der von ihm selbst berührten Seite gegenüber liegt.

Ferner wenn S den Mittelpunkt des einbeschriebenen Kreises vorstellt, so ist gemäß bekannter Construktion S zugleich der Durchschnittspunkt des die Winkel CAB, ABC, BCA des Dreiecks ABC halbierenden Geraden AS, BS, CS. Und wenn S', S'', S''' der Ordnung nach die Mittelpunkte der ausserhalb berührenden in den Ebenen der Winkel CAB, ABC, BCA befindlichen Kreise vorstellen, so ist S' zugleich der Durchschnittspunkt der Geraden AS', BS', CS', deren erste den Winkel CAB, die beiden übrigen aber die Nebenwinkel von ABC, BCA halbieren; ferner S'' zugleich der Durchschnittspunkt der Geraden AS'', BS'', CS'', deren zweite den Winkel ABC, die beiden übrigen aber die Nebenwinkel von CAB, BCA halbieren; und endlich auch S''' der Durchschnittspunkt der Geraden AS''', BS''', CS''', deren dritte den Winkel BCA, die beiden übrigen aber die Nebenwinkel von CAB, ABC halbieren.

Da also jede der Geraden AS, AS' den Winkel CAB halbiert, so liegen die drei Punkte A, S, S' in einer geraden Linie, was eben so von den Punkten B, S, S'', und C, S, S''' gilt; so daß die Geraden AS', BS'', CS''' einander im Mittelpunkte S des einbeschriebenen Kreises durchschneiden. Und weil die Geraden AS'', AS''' die beiden Nebenwinkel von CAB halbieren, so liegen auch die Punkte A, S'', S''' in einer geraden Linie, was eben so von den Punkten B, S', S''' und C, S', S'' gilt; so daß das Dreieck S' S'' S''' um das Dreieck ABC beschrieben ist. Da übrigens noch die Winkel BAS''' = CAS'' und BAS = CAS, so ist die Gerade AS' senkrecht auf S'' S''' und eben so auch BS'' auf S' S''' und CS''' auf S' S'' senkrecht; so daß die Winkelpunkte A, B, C des Dreiecks ABC zugleich die Fußpunkte derjenigen Senkrechten sind, welche im Dreieck S' S'' S''' aus den Winkelpunkten S', S'', S''' auf die gegenüberliegenden Seiten gefällt sind.

§. 2.

Man bezeichne die Halbmesser der Kreise um die Mittelpunkte S, S', S'', S''' der Ordnung nach durch die Buchstaben r, r', r'', r''' so sind bekanntlich die Werthe derselben:

$$r = \frac{2\Delta}{a+b+c},\quad r' = \frac{2\Delta}{-a+b+c},\quad r'' = \frac{2\Delta}{a-b+c},\quad r''' = \frac{2\Delta}{a+b-c}$$

wo nach der gewöhnlichen Bezeichnungsart a, b, c der Ordnung nach die Seiten BC, AC, BA und Δ den Inhalt des Dreiecks ABC bedeuten.

Multiplicirt man nun diese Ausdrücke der vier Halbmesser in einander, so wird

$$r\,r'\,r''\,r''' = \frac{16\Delta^4}{(a+b+c)\,(-a+b+c)\,(a-b+c)\,(a+b-c)},$$ und weil $(a+b+c)\,(-a+b+c)\,(a-b+c)\,(a+b-c) = 16\,\Delta^2$:

$$r\,r'\,r''\,r''' = \Delta^2$$

d. h. In jedem Dreieck sind die Halbmesser der vier seine drei Seiten berührenden Kreise von der Beschaffenheit, daß zwischen dem Rechteck aus je zweien derselben und dem Rechteck aus den beiden übrigen das vorgegebene Dreieck selbst das mittlere geometrische Proportional Dreieck ist.

Dieser Satz ist von L'huilier. Er beweist ihn in den Annales des Mathematiques par Gergonne et Lavernede. Nov. 1810. N. V.

§. 3.

Multiplicirt man je zwei und zwei Werthe der r', r'', r''' in einander und addirt die Produkte, so wird $r'r''+r'r'''+r''r''' = \frac{4\Delta^2(a+b+c)}{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$, und wenn man den Werth von Δ substituirt:

$$r'r''+r''r'''+r''r''' = \frac{1}{4}(a+b+c)^2$$

d. h. Die Summe der drei Rechtecke aus je zweien Halbmessern der ausserhalb berührenden Kreise ist gleich dem Quadrat vom halben Umfang des Dreiecks.

§. 4.

Substituirt man in dieser Gleichung aus §. 2. $a+b+c = \frac{2\Delta}{r}$, so kommt, weil $\Delta^2 = r\,r'r''r'''$ ist, $r'r''+r'r'''+r''r''' = \frac{r'r''r'''}{r}$ und $r(r'r''+r'r''' + r''r''') = r'r''r'''$. Multiplicirt man dagegen die Gleichungen $r'r''+r'r''' + r''r''' = \frac{1}{4}(a+b+c)^2$ und $r = \frac{2\Delta}{a+b+c}$ in einander, so hat man auch $r(r'r''+r'r'''+r''r''') = \frac{1}{2}(a+b+c)\Delta$. Es ist also:

$$r'r''r''' = r(r'r''+r'r'''+r''r''') = \frac{1}{2}(a+b+c)\Delta$$

d. h. Das senkrechte Parallelepiped aus den drei Halbmessern der ausserhalb berührenden Kreise ist gleich einem senkrechten Prisma, dessen Grundfläche entweder die Summe der drei Rechtecke aus je zweien dieser Halbmesser oder das vorgegebene Dreieck selbst ist; und dessen Höhe, im ersten Fall, der Halbmesser des einbeschriebenen Kreises, hingegen im zweiten der halbe Umfang des Dreiecks.

§. 5.

Addirt man die Werthe von r', r'', r'''; so kommt, weil:

$$(a+b+c)\left[(-a+b+c)(a-b+c) + (-a+b+c)(a+b-c) + (a-b+c)(a+b-c)\right]$$
$$= (-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) + 8abc,$$

$r'+r''+r''' = \frac{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)+8abc}{8\Delta}$. Nun ist

$\frac{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{8\Delta} = r$, und wenn R den Halbmesser des um das Dreieck ABC beschriebenen Kreises vorstellt, bekanntlich $R = \frac{abc}{4\Delta}$, woher man erhält:

$$r' + r'' + r''' = r + 4R$$

d. h. Die Summe der Halbmesser der drei ausserhalb berührenden Kreise ist gleich dem Halbmesser des einbeschriebenen sammt dem doppelten Durchmesser des umbeschriebenen Kreises.

§. 6.

Multiplicirt man jeden der Halbmesser r', r'', r''' durch r und addirt die Produkte; so kommt, weil:

$$(-a+b+c)(a-b+c) + (-a+b+c)(a+b-c) + (a-b+c)(a+b-c) = 4(ab+ac+bc) - (a+b+c)^2,$$

$$r(r'+r''+r''') = ab+ac+bc - \frac{1}{4}(a+b+c)^2.$$

Nun ist aus §. 3. $\quad r'r'' + r'r''' + r''r''' = \frac{1}{4}(a+b+c)^2.$

Addirt man demnach diese beiden Gleichungen, so ergiebt sich:

$$rr' + rr'' + rr''' + r'r'' + r'r''' + r''r''' = ab + ac + bc \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

d. h. Die Summe der sechs Rechtecke aus je zweien Halbmessern der vier berührenden Kreise eines Dreiecks ist gleich der Summe der drei Rechtecke aus je zweien Seiten desselben.

Zieht man hingegen die erste jener beiden Gleichungen von der zweiten ab, so wird:

$$r'r'' + r'r''' + r''r''' - r(r' + r'' + r''') = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) \quad . \quad . \quad (2)$$

d. h. Die Summe der drei Rechtecke aus je zweien Halbmessern der drei ausserhalb berührenden Kreise, weniger dem Rechteck aus der Summe dieser Halbmesser in den Halbmesser des einbeschriebenen Kreises, ist gleich der halben Summe der Quadrate von den Seiten des Dreiecks.

§. 7.

Weil $r'^2 + r''^2 + r'''^2 = (r' + r'' + r''')^2 - 2(r'r'' + r'r''' + r''r''')$ so wird nach §. 3. 5. 1.

$$r'^2 + r''^2 + r'''^2 = (r + 4R)^2 - \frac{1}{2}(a+b+c)^2$$

d. h. Die Summe der Quadrate von den Halbmessern der drei ausserhalb berührenden Kreise ist gleich dem Quadrat von der Summe aus dem Halbmesser des einbeschriebenen Kreises und dem doppelten Durchmesser des umbeschriebenen, weniger dem halben Quadrat vom Umfange des Dreiecks.

Wir werden unten §. 28. noch einen andern Ausdruck für die Summe der Quadrate dieser Halbmesser erhalten.

§. 8.

Wenn D, E, F die Berührungspunkte des in das Dreieck ABC beschriebenen Kreises mit den Seiten BC, AC, AB desselben sind, so ist:

$$\triangle DEF = \triangle - \triangle AEF - \triangle BDF - \triangle CDE.$$

Nun ist, nach einer bekannten Eigenschaft, des Kreises $AE = AF = \frac{1}{2}(-a+b+c)$, also wenn wir durch die Buchstaben α, β, γ der Ordnung nach die den Seiten a, b, c gegenüberliegenden Winkel des Dreiecks ABC bezeichnen, $\triangle AEF = \frac{1}{8}(-a+b+c)^2 \sin\alpha$, und weil $\sin\alpha = \frac{2\triangle}{bc}$, so ist auch:

$\triangle AEF = \frac{(-a+b+c)^2\triangle}{4bc}$; eben so $\triangle BDF = \frac{(a-b+c)^2\triangle}{4ac}$, und $\triangle CDE =$

$$\frac{(a+b-c)^2\triangle}{4ab}.$$

Substituirt man diese Werthe im Ausdruck von $\triangle DEF$, so kommt, da

$$4abc - a(-a+b+c)^2 - b(a-b+c)^2 - c(a+b-c)^2 = (-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c),$$

$$\triangle DEF = \frac{r\triangle}{2R}.$$

Da das Dreieck D′E′F′, welches die Berührungspunkte D′, E′, F′ des ausserhalb berührenden in der Ebene des Winkels CAB befindlichen Kreises mit den Seiten BC, AC, AB des Dreiecks ABC bilden, ganz auf die nemliche Weise durch den Halbmesser $r' = \frac{2\triangle}{-a+b+c}$ bestimmt wird, wie das eben betrachtete Dreieck DEF durch den Halbmesser $r = \frac{2\triangle}{a+b+c}$, und man jenen Halbmesser aus diesem erhält, wenn man in dem Ausdruck des letzten a negativ setzt; so wird man leicht erkennen, daß sich der Werth des Dreiecks D′E′F′ sogleich aus dem gefundenen des Dreiecks DEF ableiten läßt, wenn man im letzten −a statt +a setzt.

Alsdann wird r zu r′ und +R zu -R, hingegen $\triangle$ bleibt ungeändert und es wird demnach $\triangle D'E'F' = -\frac{r'\triangle}{2R}$, wo indessen das Zeichen (-) nicht in Betrachtung kommt, da wir hier nur nach dem absoluten Werth des Dreiecks fragen.

Eben so ergeben sich die Ausdrücke für die beiden übrigen Dreiecke, welche die Berührungspunkte der Kreise von den Halbmessern r'', r''' bilden, wenn man in dem Werthe des Dreiecks DEF für das erste -b statt +b und für das andere -c statt +c setzt; so daß man allgemein, wenn δ, δ', δ'', δ''' die Inhalte derjenigen Dreiecke bedeuten, welche durch die Berührungspunkte der Kreise von den Halbmessern r, r′, r″, r‴ bestimmt sind, erhalten wird:

$$\frac{\delta}{r} = \frac{\delta'}{r'} = \frac{\delta''}{r''} = \frac{\delta'''}{r'''} = \frac{\triangle}{2R}.$$

Und es entsteht hieraus der Satz: **In jedem Dreieck verhält sich dasjenige Dreieck, welches durch die Berührungspunkte irgend eines die drei Seiten desselben berührenden Kreises bestimmt wird, zum vorgegebenen wie sich verhält der Halbmesser eben dieses Kreises zum Durchmesser des um das gegebene Dreieck beschriebenen.**

§. 9.

Addirt man die so eben gefundenen Werthe der Dreiecke δ', δ'', δ''' zu einander, so kommt, weil wir in §. 5. $r' + r'' + r''' = r + 4R$ gefunden haben, $\delta' + \delta'' + \delta''' = \frac{r\triangle}{2R} + 2\triangle$ und da (§. 8.) $\delta = \frac{r\triangle}{2R}$,

$$\delta' + \delta'' + \delta''' = \delta + 2\triangle.$$

d. h. Wenn man die Berührungspunkte eines jeden ausserhalb berührenden und auch des einbeschriebenen Kreises durch Gerade mit einander verbindet, so entstehen vier Dreiecke, von welchen die Inhalte der drei ersten zusammengenommen gleich sind dem Inhalte des letzten sammt dem Doppelten des vorgegebenen Dreiecks.

§. 10.

Da die Gerade AS sowohl die EF als auch den Winkel CAB halbiert, so ist $\frac{1}{2}EF = r\cos\frac{1}{2}\alpha$; mithin:

$EF = 2r\cos\frac{1}{2}\alpha$; eben so $DF = 2r\cos\frac{1}{2}\beta$, und $DE = 2r\cos\frac{1}{2}\gamma$.

Erhebt man diese drei Ausdrücke ins Quadrat, so ist $\overline{DE}^2 + \overline{DF}^2 + \overline{EF}^2 = 4r^2(\cos\frac{1}{2}\alpha^2 + \cos\frac{1}{2}\beta^2 + \cos\frac{1}{2}\gamma^2)$, und drückt man diese Cosinus der halben Winkel durch die Seiten aus; so wird, weil:

$$a(-a+b+c) + b(a-b+c) + c(a+b-c) = (-a+b+c)(a-b+c) + (-a+b+c)(a+b-c) + (a-b+c)(a+b-c),$$

nach einer §. 5. angegebenen Umformung:

$$\cos\frac{1}{2}\alpha^2 + \cos\frac{1}{2}\beta^2 + \cos\frac{1}{2}\gamma^2 = \frac{r+4R}{2R};$$

und also nach §. 5.

$$\overline{DE}^2 + \overline{DF}^2 + \overline{EF}^2 = \frac{2r^2(r'+r''+r''')}{R},$$

Oder

$$\overline{DE}^2 + \overline{DF}^2 + \overline{EF}^2 : 2r^2 = r'+r''+r''' : R$$

d. h. In jedem Dreieck verhält sich die Summe der Quadrate von den Seiten desjenigen Dreiecks, welches die Berührungspunkte des einbeschriebenen Kreises bilden, zum doppelten Quadrat vom Halbmesser dieses Kreises, wie sich verhält die Summe der Halbmesser der drei ausserhalb berührenden Kreise zum Halbmesser des umbeschriebenen.

Um den Werth von $\overline{D'F'}^2 + \overline{D'E'}^2 + \overline{E'F'}^2$ zu erhalten, setze man nur, gleichwie oben (§. 8.) bei der Bestimmung des Dreiecks $D'E'F'$ aus dem Dreieck DEF, in dem Werthe von $\overline{DE}^2 + \overline{DF}^2 + \overline{EF}^2$ statt $+a$, $-a$; so verwandeln sich r, r', r'', r''', R der Ordnung nach in $r', r, -r''', -r'', -R$ und also $\overline{D'E'}^2 + \overline{D'F'}^2 + \overline{E'F'}^2 = \frac{2r'^2(r''+r'''-r)}{R}$.

Eben so ergeben sich die Ausdrücke für die Quadrate von den Seiten der beiden übrigen Dreiecke, deren Inhalte wir oben durch δ'', δ''' bezeichnet haben, wenn man in dem Werthe von $\overline{DE}^2 + \overline{DF}^2 + \overline{EF}^2$ für das erste $-b$ statt $+b$ und für das andere $-c$ statt $+c$ setzt; so daß man, wenn die Buchstaben d', e', f'; d'', e'', f''; d''', e''', f''' die Seiten der Dreiecke δ', δ'', δ''' anzeigen, erhalten wird:

$$d'^2 + e'^2 + f'^2 : 2r'^2 = r'' + r''' - r : R$$
$$d''^2 + e''^2 + f''^2 : 2r''^2 = r' + r''' - r : R$$
$$d'''^2 + e'''^2 + f'''^2 : 2r'''^2 = r' + r'' - r : R$$

d. h. In jedem Dreieck verhält sich die Summe der Quadrate von den Seiten desjenigen Dreiecks, welches die Berührungspunkte irgend eines seiner ausserhalb berührenden Kreise bilden, zum doppelten Quadrat vom Halbmesser dieses Kreises, wie sich verhält die Summe der Halbmesser der beiden übrigen ausserhalb berührenden Kreise, weniger dem Halbmesser des einbeschriebenen zum Halbmesser des umbeschriebenen Kreises.

Wir werden übrigens auf die Betrachtung der Seiten dieser Dreiecke δ, δ', δ'', δ''' noch einmal §. 69. 70. zurückkommen.

§. 11.

Es ist $AS = \frac{r}{\sin\frac{1}{2}\alpha}$, $BS = \frac{r}{\sin\frac{1}{2}\beta}$, $CS = \frac{r}{\sin\frac{1}{2}\gamma}$; also $AS \cdot BS \cdot CS$

$$= \frac{r^3}{\sin\frac{1}{2}\alpha \sin\frac{1}{2}\beta \sin\frac{1}{2}\gamma}.$$

Nun ist aber wenn man die Sinus dieser halben Winkel durch die Seiten darstellt:

$$\sin\tfrac{1}{2}\alpha \sin\tfrac{1}{2}\beta \sin\tfrac{1}{2}\gamma = \frac{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{8abc} = \frac{r}{4R};$$

folglich:

$$AS \cdot BS \cdot CS = 4r^2 R$$

Setzt man hierinn nach und nach a, b, c negativ, so erhält man ferner, wenn man von dem Zeichen (-), mit welchem diese Resultate erscheinen werden, als ohne Einfluß auf die Betrachtung ihrer absoluten Größe, abstrahirt:

$$AS' \cdot BS' \cdot CS' = 4r'^2 R$$
$$AS'' \cdot BS'' \cdot CS'' = 4r''^2 R$$
$$AS''' \cdot BS''' \cdot CS''' = 4r'''^2 R$$

d. h. Der Mittelpunkt jedes die drei Seiten eines Dreiecks berührenden Kreises liegt also, daß das senkrechte Parallelepiped aus seinen drei Abständen von den Winkelpunkten des Dreiecks gleich ist dem senkrechten Parallelepiped,

dessen Grundfläche das Quadrat vom Durchmesser dieses Kreises ist und dessen Höhe der Halbmesser des umbeschriebenen.

§. 12.

Wenn man um die Dreiecke

BCS, ACS, ABS; BCS′, ACS′, ABS′; BCS″, ACS″, ABS″; BCS‴, ACS‴, ABS‴

Kreise beschreibt, und die Halbmesser derselben der Ordnung nach durch folgende Buchstaben vorstellt:

$$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}; \mathfrak{A}', \mathfrak{B}', \mathfrak{C}'; \mathfrak{A}'', \mathfrak{B}'', \mathfrak{C}''; \mathfrak{A}''', \mathfrak{B}''', \mathfrak{C}''';$$

so ist $\mathfrak{A} = \frac{BC \cdot BS \cdot CS}{4 \triangle BCS}$; und wenn man die Werthe von BS, CS substituirt, so kommt, weil $\triangle BCS = \frac{1}{2} ar$:

$$\mathfrak{A} = \frac{r}{2 \sin \frac{1}{2} \beta \sin \frac{1}{2} \gamma}; \text{ eben so } \mathfrak{B} = \frac{r}{2 \sin \frac{1}{2} \alpha \sin \frac{1}{2} \gamma}, \text{ und } \mathfrak{C} = \frac{r}{2 \sin \frac{1}{2} \alpha \sin \frac{1}{2} \beta}.$$

Multiplicirt man diese drei Werthe in einander, so kommt, weil (§. 10.) $\sin \frac{1}{2} \alpha \sin \frac{1}{2} \beta \sin \frac{1}{2} \gamma = \frac{r}{4R}$ ist,

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C} = 2r R^2;$$

und, wenn man in diesem Ausdruck nach und nach a, b, c negativ setzt,

$$\mathfrak{A}' \mathfrak{B}' \mathfrak{C}' = 2r' R^2$$

$$\mathfrak{A}'' \mathfrak{B}'' \mathfrak{C}'' = 2r'' R^2$$

$$\mathfrak{A}''' \mathfrak{B}''' \mathfrak{C}''' = 2r''' R^2$$

d. h. In jedem Dreieck ist das senkrechte Parallelepiped aus den Halbmessern derjenigen drei Kreise, welche durch den Mittelpunkt irgend eines seiner berührenden Kreise und je zweien seiner Winkelpunkte gehen, gleich dem senkrechten Parallelepiped, dessen Höhe der Durchmesser dieses letzten Kreises ist, und dessen Grundfläche das Quadrat vom Halbmesser des umbeschriebenen.

§. 13.

Erhebt man die Werthe der $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ ins Quadrat und addirt sie, so kommt

$\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 + \mathfrak{C}^2 = \frac{r^2 (\sin\frac{1}{2}\alpha^2 + \sin\frac{1}{2}\beta^2 + \sin\frac{1}{2}\gamma^2)}{4\sin\frac{1}{2}\alpha^2 \sin\frac{1}{2}\beta^2 \sin\frac{1}{2}\gamma^2}$. Da wir nun in §. 10. schon gefunden haben, daß $\cos\frac{1}{2}\alpha^2 + \cos\frac{1}{2}\beta^2 + \cos\frac{1}{2}\gamma^2 = 2 + \frac{r}{2R}$, so ist:

$$\sin\frac{1}{2}\alpha^2 + \sin\frac{1}{2}\beta^2 + \sin\frac{1}{2}\gamma^2 = 1 - \frac{r}{2R},$$

und also, wenn man auch $\sin\frac{1}{2}\alpha \sin\frac{1}{2}\beta \sin\frac{1}{2}\gamma = \frac{r}{4R}$ im obigem Ausdruck substituirt:

$$\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 + \mathfrak{C}^2 = 2R(2R - r)$$

d. h. In jedem Dreieck ist die Summe der Quadrate von den Halbmessern derjenigen drei Kreise, welche durch den Mittelpunkt des einbeschriebenen und je zwei Winkelpunkte desselben gehn, gleich dem Rechteck aus dem Durchmesser des umbeschriebenen Kreises in den Überschuß dieses Durchmessers über den Halbmesser jenes einbeschriebenen.

Verwandelt man in diesem Ausdruck nach und nach $+a$, $+b$, $+c$ in $-a$, $-b$, $-c$ so kommt auch:

$$\mathfrak{A}'^2 + \mathfrak{B}'^2 + \mathfrak{C}'^2 = 2R(2R + r')$$
$$\mathfrak{A}''^2 + \mathfrak{B}''^2 + \mathfrak{C}''^2 = 2R(2R + r'')$$
$$\mathfrak{A}'''^2 + \mathfrak{B}'''^2 + \mathfrak{C}'''^2 = 2R(2R + r''')$$

d. h. In jedem Dreieck ist die Summe der Quadrate von den Halbmessern derjenigen drei Kreise, welche durch den Mittelpunkt irgend eines ausserhalbberührenden und je zwei Winkelpunkte desselben gehn, gleich dem Rechteck aus dem Durchmesser des umbeschriebenen Kreises in die Summe dieses Durchmessers und des Halbmessers jenes ausserhalb berührenden.

§. 14.

Multiplicirt man die in §. 11. angegebenen Werthe von AS, BS, CS der Ordnung nach in die von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, so ist $AS . \mathfrak{A} = BS . \mathfrak{B} = CS . \mathfrak{C} = \frac{r^2}{2\sin\frac{1}{2}\alpha \sin\frac{1}{2}\beta \sin\frac{1}{2}\gamma}$, und also, weil $\sin\frac{1}{2}\alpha \sin\frac{1}{2}\beta \sin\frac{1}{2}\gamma = \frac{r}{4R}$,

$$AS . \mathfrak{A} = BS . \mathfrak{B} = CS . \mathfrak{C} = 2rR$$

Setzt man hierin nach und nach a, b, c negativ und betrachtet bloß die absoluten Werthe dieser Resultate so erhält man noch:

$$AS' \,.\, \mathfrak{A}' = BS' \,.\, \mathfrak{B}' = CS' \,.\, \mathfrak{C}' = 2r' R$$
$$AS'' \,.\, \mathfrak{A}'' = BS'' \,.\, \mathfrak{B}'' = CS'' \,.\, \mathfrak{C}'' = 2r'' R$$
$$AS''' \,.\, \mathfrak{A}''' = BS''' \,.\, \mathfrak{B}''' = CS''' \,.\, \mathfrak{C}''' = 2r''' R$$

d. h. In jedem Dreieck ist das Rechteck aus dem Abstande des Mittelpunktes jedes seine drei Seiten berührenden Kreises von irgend einem Winkelpunkte desselben in den Halbmesser desjenigen Kreises, welcher durch die beiden übrigen Winkelpunkte und jenen Mittelpunkt geht, gleich dem doppelten Rechteck aus den Halbmessern des umbeschriebenen und jenes berührenden Kreises.

§. 15.

Da man leicht erkennen wird, daß sich um die Vierecke BCSS', ACSS'', ABSS''', so wie um BCS''S''', ACS'S''', ABS'S'' Kreise beschreiben lassen, so folgt:

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}' = \frac{1}{2} SS' \qquad \mathfrak{B} = \mathfrak{B}'' = \frac{1}{2} SS'' \qquad \mathfrak{C} = \mathfrak{C}''' = \frac{1}{2} SS'''$$

$$\mathfrak{A}'' = \mathfrak{A}''' = \frac{1}{2} S''S''' \qquad \mathfrak{B}' = \mathfrak{B}''' = \frac{1}{2} S'S''' \qquad \mathfrak{C}' = \mathfrak{C}'' = \frac{1}{2} S'S''$$

Man setze nun wieder zur bequemern Übersicht des folgenden Calculs:

$$SS' = A \qquad SS'' = B \qquad SS''' = C$$
$$S''S''' = A' \qquad S'S''' = B' \qquad S'S'' = C'$$

so hat man aus §. 12. diese vier Gleichungen:

$$ABC = 16 r R^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$
$$AB'C' = 16 r' R^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$
$$A'BC' = 16 r'' R^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$
$$A'B'C = 16 r''' R^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Multiplicirt man die drei letzten Gleichungen in einander und dividirt die so entstandene durch die erste; so kommt, weil (§. 2.) $r' r'' r''' = \frac{\Delta^2}{r}$, $A'B'C' = \frac{16 \Delta R^2}{r}$; und, da $\frac{\Delta}{r} = \frac{1}{2}(a+b+c)$:

$$A'B'C' = 8(a+b+c) R^2 .$$

Man dividire nun diese Gleichung nach und nach durch die 2te, 3te und 4te der

aus §. 12. abgeleiteten, so entspringen drei neue Gleichungen, nämlich zwischen A, A′ und B, B′ und C, C′, aus welchen man die A, B, C durch A′, B′, C′ suche.

Substituirt man nun die durch A′, B′, C′ ausgedrückten Werthe der A, B, C nach einander in der 1ten $ABC = 16 r R^2$, so ergeben sich nach gehöriger Bearbeitung noch folgende drei Gleichungen:

$$A'BC = 8(-a+b+c)R^2$$
$$AB'C = 8(a-b+c)R^2$$
$$ABC' = 8(a+b-c)R^2$$

Wenn man diese addirt, so kommt, da wir auch $A'B'C' = 8(a+b+c)R^2$ gefunden haben:

$$A'B'C' = A'BC + AB'C + ABC' = 8(a+b+c)R^2$$

d. h. Die drei Mittelpunkte der ausserhalb berührenden Kreise haben eine solche Lage zum Mittelpunkt des einbeschriebenen, daß das senkrechte Parallelepiped aus ihren Abständen von einander selbst, gleich ist der Summe der drei senkrechten Parallelepipeden aus den Abständen je zweier derselben von einander und vom Mittelpunkte des einbeschriebenen; und zwar gleich dem senkrechten Parallelepiped, dessen Grundfläche das Quadrat vom Durchmesser des umbeschriebenen Kreises ist, und dessen Höhe der doppelte Umfang des Dreiecks.

§. 16.

Aus §. 13. hat man mit Hülfe der letzten eingeführten Bezeichnung diese vier Relationen:

$$A^2 + B^2 + C^2 = 8R(2R - r) \quad \ldots \quad (1)$$
$$A^2 + B'^2 + C'^2 = 8R(2R + r') \quad \ldots \quad (2)$$
$$A'^2 + B^2 + C'^2 = 8R(2R + r'') \quad \ldots \quad (3)$$
$$A'^2 + B'^2 + C^2 = 8R(2R + r''') \quad \ldots \quad (4)$$

Addirt man die drei letzten zusammen und zieht von dieser Summe die erste ab, so wird:

$$A'^2 + B'^2 + C'^2 = 8R(4R + r) = 8R(r' + r'' + r''')$$

d. h. Die Mittelpunkte der drei ausserhalb berührenden Kreise liegen also, daß die Summe der Quadrate ihrer Abstände von einander, gleich ist dem doppel-

ten Rechteck aus der Summe der Durchmesser dieser Kreise in den Durchmesser des um das Dreieck beschriebenen Kreises.

Wenn man die so eben gefundene Gleichung zu der ersten hinzuthut, so kommt:

$$A^2 + B^2 + C^2 + A'^2 + B'^2 + C'^2 = 48R^2$$

und zieht man von dieser nach einander die 2te, 3te und 4te wieder ab, so gewinnt man noch folgende Relationen:

$$A'^2 + B^2 + C^2 = 8R(4R - r')$$
$$A^2 + B'^2 + C^2 = 8R(4R - r'')$$
$$A^2 + B^2 + C'^2 = 8R(4R - r''')$$

d. h. Die Summe der Quadrate von den drei Abständen irgend zweier Mittelpunkte der ausserhalb berührenden Kreise von einander und vom Mittelpunkt des einbeschriebenen Kreises, ist gleich dem vierfachen Rechteck aus dem Durchmesser des umbeschriebenen in den Überschuß dieses doppelten Durchmessers über den Halbmesser des dritten ausserhalb berührenden Kreises.

§. 17.

Aus §. 13. bekommt man folgende Relationen:

$$AS\,.\,A = BS\,.\,B = CS\,.\,C = 4rR \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$
$$AS'\,.\,A = BS'\,.\,B' = CS'\,.\,C' = 4r'R \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$
$$AS''\,.\,A' = BS''\,.\,B = CS''\,.\,C' = 4r''R \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$
$$AS'''\,.\,A' = BS'''\,.\,B' = CS'''\,.\,C = 4r'''R \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Nimmt man die ersten Seiten der drei letzten Relationen zusammen, so kommt, weil $r' + r'' + r''' = r + 4R$ und $AS'' + AS''' = A'$ ist, $AS'\,.\,A + A'^2 = 4rR + 16R^2$. Substituirt man hierin aus Relat. (1) $4rR = AS\,.\,A$, so kommt, weil $AS' - AS = SS' = A$, $A^2 + A'^2 = 16R^2$; welchen Werth man auf ähnlichem Wege für $B^2 + B'^2$ und $C^2 + C'^2$ findet, so daß:

$$A^2 + A'^2 = B^2 + B'^2 = C^2 + C'^2 = 16R^2$$

d. h. Die Mittelpunkte der vier Kreise, welche die drei Seiten eines Dreiecks berühren, liegen also, daß das Quadrat vom Abstande je zweier von einander, sammt dem Quadrat vom Abstande der beiden übrigen von einander, jedes-

mal von derselben Grösse ist; und zwar gleich dem vierfachen Quadrate von Durchmesser des umbeschriebenen Kreises.

Hieraus folgt unmittelbar, daß $A^2 + B^2 + C^2 + A'^2 + B'^2 + C'^2 = 48R^2$, welche Relation schon im §. 16. vorgekommen ist.

§. 18.

Man wird leicht einsehen, aus welchem Grunde wir in §. 12. 13. 14. die besondere Bezeichnung der Geraden A, B, C, A′, B′, C′ noch beibehalten haben. Ohne diese wären die daselbst aufgeführten Sätze schwerlich gefunden worden, und wir haben zugleich den Vortheil erlangt, die Werthe dieser Linien nicht unmittelbar aus der Figur durch geometrische Betrachtung ableiten zu müssen; wodurch sonach alle Sätze von §. 12. an blos aus den Werthen der 𝔄, 𝔅, ℭ durch reinen Calcul entwickelt werden konnten.

Indem wir übrigens hier diese Reihe Untersuchungen abbrechen, mache ich auf eine in §. 1. gemachte Bemerkung aufmerksam, nach welcher die Winkelpunkte des Dreiecks ABC zugleich die Fußpunkte der Perpendikel im Dreieck S′ S″ S‴ sind. Diese Bemerkung veranlaßt uns, nun das Dreieck S′ S″ S‴ als Elementardreieck anzunehmen, und die übrigen Stücke der Figur aus diesem herzuleiten. Wir werden hierdurch im Stande seyn, fernere bemerkenswerthe Eigenschaften dieses Systems von Raumgrössen weit einfacher und zierlicher zu gewinnen, als es hier geschehen könnte.

Zweiter Abschnitt.

Vom Durchschnittspunkte der Senkrechten, welche aus den Winkelpunkten eines Dreiecks auf die gegenüberliegenden Seiten gefällt sind.

§. 19.

Wenn man aus den drei Winkelpunkten eines beliebigen Dreiecks ABC auf die gegenüberliegenden Seiten desselben die Senkrechten AM, BN, CP fällt, welche sich bekanntlich in einem und eben demselben Punkt O schneiden, so bestimmen die Fußpunkte dieser Senkrechten ein Dreieck MNP, welches darum merkwürdig ist, weil es unter allen in das Dreieck ABC beschriebenen Dreiecken den kleinsten Umfang hat *). Es wird daher nicht uninteressant seyn, dieses Dreieck näher zu betrachten, und vor allem seinen Umfang und Inhalt selbst, so wie das Verhältniß beider zum Umfang und Inhalt des vorgegebenen Dreiecks ABC zu bestimmen.

Fig. :

Wenn wir die im vorigen Abschnitt gebrauchte Bezeichnungsart für das Dreieck ABC beibehalten, so ist $AP = b \cos \alpha$, $AN = c \cos \alpha$, also $\overline{NP}^2 = (b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha) \cos \alpha^2$; allein $b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha = a^2$, folglich $\overline{NP}^2 = a^2 \cos \alpha^2$ und $NP = a \cos \alpha$; eben so $MP = b \cos \beta$, und $MN = c \cos \gamma$;

oder, wenn man die Cosinus durch die Seiten ausdrückt:

$$MN = \frac{c(a^2 + b^2 - c^2)}{2ab}, \quad MP = \frac{b(a^2 - b^2 + c^2)}{2ac}, \quad NP = \frac{a(-a^2 + b^2 + c^2)}{2bc}.$$

Addirt man diese drei Werthe, so wird, weil:

$$a^2(-a^2 + b^2 + c^2) + b^2(a^2 - b^2 + c^2) + c^2(a^2 + b^2 - c^2) = 16\Delta^2,$$

$MN + MP + NP = \frac{8\Delta^2}{abc}$; und, da $\frac{abc}{4\Delta} = R$, wo R wie bisher den Halbmesser des um das Dreieck ABC beschriebenen Kreises vorstellt, so kommt der gesuchte Umfang

$$MN + MP + NP = \frac{2\Delta}{R}.$$

*) Fagnani lehrte dieß vielleicht zuerst in der Abhandl. Problemata quaedam ad methodum max. et min. spectantia. Acta Erud. mens. Junii 1775.

Zugleich ist $R(MN + MP + NP) = 2\Delta$.

d. h. Das Rechteck aus dem Umfang des Dreiecks MNP in den Halbmesser des um das Dreieck ABC beschriebenen Kreises, ist gleich dem doppelten Inhalt Inhalt des letzten Dreiecks.

Ist das Dreieck ABC stumpfwinklig z. B. bei A, so wird die, diesem stumpfen Winkel gegenüberliegende, Seite NP des Dreiecks MNP im Umfange negativ, so daß alsdann $MN + MP - NP = \frac{2\Delta}{R}$. Diese Bemerkung gilt eben so für die folgenden Sätze.

§. 20.

Man fälle in eben diesem Dreiecke ABC aus irgend einem der betrachteten Fig. 3. Fußpunkte z. B. aus P in der Seite AB auf die beiden andern Seiten AC, BC die Senkrechten PG, PH, und verbinde die Fußpunkte G, H derselben durch die Gerade GH, welche wir in Zukunft durch Q vorstellen wollen. Weil sich nun um das Viereck CGPH ein Kreis beschreiben läßt, so ist der Winkel $GPH = 180 - \gamma$ und $GHP = 90 - \alpha$, folglich $Q = PG \frac{\sin\gamma}{\cos\alpha}$; allein, weil $CP = \frac{2\Delta}{c}$, so ist $PG = \frac{2\Delta}{c} \cos\alpha$, und da auch $\sin\gamma = \frac{c}{2R}$, so wird $Q = \frac{\Delta}{R}$ und:

$$QR = \Delta.$$

Da übrigens in dem Werthe von Q jede der drei Seiten des Dreiecks ABC gleichförmig vorkommt, so wird man durch die nämliche Construktion auf den Seiten AC, BC jedesmal eine Linie der nämlichen Grösse wie Q erhalten, so daß sich der Satz ergiebt:

Wenn man aus dem Fußpunkte irgend eines der drei Perpendikel eines Dreiecks auf die beiden andern Seiten desselben Senkrechte fällt, so ist die Gerade, welche die Fußpunkte dieser beiden Senkrechten mit einander verbindet, von der Beschaffenheit, daß das Rechteck aus ihr in den Halbmesser des um das Dreieck beschriebenen Kreises gleich ist dem Inhalte des Dreiecks.

Da nun in §. 19. $MN + MP + NP = \frac{2\Delta}{R}$ war, so folgt auch $MN + MP + NP = 2Q$.

d. h. Der Umfang des Dreiecks MNP ist doppelt so groß als die Gerade, welche die Fußpunkte derjenigen beiden Senkrechten mit einander verbindet, die

aus irgend einem Winkelpunkt dieses Dreiecks auf die Seiten des Dreiecks ABC gefällt sind.

§. 21.

Weil $AM = \frac{2\Delta}{a}$, $BN = \frac{2\Delta}{b}$, $CP = \frac{2\Delta}{c}$, so ist $AM \cdot BN \cdot CP = \frac{8\Delta^3}{abc}$; Fig. 2. und, da aus §. 19. $MN + MP + NP = \frac{8\Delta^2}{abc}$, so kommt:

$$AM \cdot BN \cdot CP = (MN + MP + NP)\Delta$$

d. h. Das senkrechte Parallelepiped aus den drei Perpendikeln eines Dreiecks ist gleich dem senkrechten Prisma, dessen Grundfläche das Dreieck selbst ist, und dessen Höhe der Umfang desjenigen Dreiecks, welches die Fußpunkte jener Perpendikel bestimmen.

§. 22.

Wenn r wie bisher den Halbmesser des in das Dreieck ABC beschriebenen Kreises vorstellt, so ist $2\Delta = r(a + b + c)$; also aus §. 19. $MN + MP + NP = \frac{r(a + b + c)}{R}$ oder:

$$MN + MP + NP : a + b + c = r : R$$

d. h. Die Umfange der Dreiecke MNP und ABC verhalten sich respektive wie die Halbmesser der in und um das Dreieck ABC beschriebenen Kreise.

§. 23.

Weil $AN = c \cos\alpha$, $AP = b \cos\alpha$ und $\frac{1}{2} bc \sin\alpha = \Delta$, so kommt:

$\Delta ANP = \Delta \cos\alpha^2$; eben so $\Delta BMP = \Delta \cos\beta^2$, und $\Delta CMN = \Delta \cos\gamma^2$; folglich $\Delta MNP = \Delta(1 - \cos\alpha^2 - \cos\beta^2 - \cos\gamma^2)$; allein weil $\cos\gamma^2 = (\cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta)^2$ und $\sin\alpha^2 \sin\beta^2 = 1 - \cos\alpha^2 - \cos\beta^2 + \cos\alpha^2 \cos\beta^2$, so ist:

$$\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1 - 2\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma,$$

also:

$$\Delta MNP = 2\Delta \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma = \frac{(-a^2+b^2+c^2)(a^2-b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)}{4a^2b^2c^2}\Delta.$$

§. 24.

Wenn ρ den Halbmesser vom innerhalb berührenden Kreise des Dreiecks MNP vorstellt und $\overset{(1)}{\rho}, \overset{(2)}{\rho}, \overset{(3)}{\rho}$ der Ordnung nach die Halbmesser seiner ausserhalb berührenden in den Ebenen der Winkel PMN, MNP, NPM befindlichen Kreise, so sind nach §. 2. 23. für das spitzwinklige Dreieck ABC:

$$\rho = \frac{4\Delta \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma}{a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma}, \quad \overset{(1)}{\rho} = \frac{4\Delta \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma}{-a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma};$$

und für ein bei A stumpfwinkliges Dreieck ABC:

$$\rho = -\frac{4\Delta \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma}{-a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma}, \quad \overset{(1)}{\rho} = -\frac{4\Delta \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma}{a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma}.$$

Da nun allgemein aus §. 19. $a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma = \frac{2\Delta}{R}$, so erhält man für das spitzwinklige Dreieck ABC:

$$\rho = 2R\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = \frac{(-a^2+b^2+c^2)(a^2-b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)}{16\,abc\,\Delta},$$

hingegen für das bei A stumpfwinklige $\overset{(1)}{\rho} = -2R\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$; woraus man offenbar sieht, daß allgemein, wenn das Dreieck ABC stumpfwinklig z. B. bei A wird, der Werth von ρ oder dem Halbmesser vom innerhalb berührenden Kreise des Dreiecks MNP übergeht in den negativen Werth von $\overset{(1)}{\rho}$ oder dem Halbmesser desjenigen ausserhalb berührenden Kreises dieses Dreiecks, welcher die, diesem stumpfen Winkel A gegenüberliegende, Seite NP selbst berührt. Wir werden uns daher von nun an, da wir den Halbmesser ρ in den Kalkul einführen, füglich auf das spitzwinklige Dreieck beschränken können, indem man die folgenden Sätze sogleich für das stumpfwinklige Dreieck umformen kann, wenn man ρ in $-\overset{(1)}{\rho}, -\overset{(2)}{\rho}, -\overset{(3)}{\rho}$ verwandelt, je nachdem der Winkel A, B, C stumpf angenommen wird.

Man bemerke auch, daß die Winkelpunkte A, B, C sammt dem Durchschnittspunkt O der Perpendikel des Dreiecks ABC zugleich die Mittelpunkte der vier Kreise sind, welche die drei Seiten des Dreiecks MNP berühren, und daß für das spitzwinklige Dreieck ABC der Durchschnittspunkt seiner Perpendikel für das stumpfwinklige hingegen der Scheitel des stumpfen Winkels jedesmal in den Mittelpunkt des innerhalb berührenden Kreises des Dreiecks MNP falle. Dieses ergiebt sich sehr leicht aus der Betrachtung, daß, weil um die Vierecke ANOP, BMOP Kreise beschrieben werden können, der Winkel APN = BPM; was eben so bei M und N statt

findet. Für das stumpfwinklige Dreieck kann man sich der nämlichen Figur bedienen, wenn man nur den Buchstaben O mit einem der Winkelpunkte A, B, C vertauscht.

Nach diesem allgemeinen Gesichtspunkt stellt demnach ρ oder $\overset{(1)}{\rho}$, $\overset{(2)}{\rho}$, $\overset{(3)}{\rho}$, je nachdem das Dreieck ABC spitzwinklig oder bei A, B, C stumpfwinklig ist, jedesmal den Halbmesser desjenigen die drei Seiten des Dreiecks MNP berührenden Kreises vor, dessen Mittelpunkt in dem Durchschnittspunkte O der Perpendikel des Dreiecks ABC liegt.

§. 25.

Da also $\rho = 2R \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma$ und aus §. 23. $\triangle MNP = 2\triangle \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma$, so folgt:

$$\triangle MNP : \triangle = \rho : R$$

d. h. Der Inhalt des Dreiecks MNP verhält sich zum Inhalt des Dreiecks ABC wie der Halbmesser des in das erste zum Halbmesser des um das zweite Dreieck beschriebenen Kreises.

§. 26.

Der Halbmesser des um das Dreieck MNP beschriebenen Kreises ist gleich $\frac{MN.MP.NP}{4\triangle MNP} = \frac{abc \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma}{8\triangle \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma} = \frac{1}{2}R$,

d. h. gleich der Hälfte vom Halbmesser des um das Dreieck ABC beschriebenen Kreises.

§. 27.

Weil $\rho = 2R \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma$ (§. 24.) so ist $\rho + 2R = 2R(1 + \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma)$. Man stelle nun die Cosinus durch die Seiten dar, so kommt, da:

$$16\triangle^2 (a^2+b^2+c^2) = 8a^2b^2c^2 + (-a^2+b^2+c^2)(a^2-b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2),$$

$$\rho + 2R = \frac{a^2+b^2+c^2}{4R}, \text{ folglich:}$$

$$a^2+b^2+c^2 = 4R(\rho+2R) = 4\rho R + 8R^2$$

d. h. Die Summe der Quadrate von den Seiten des Dreiecks ABC ist gleich dem Rechteck aus den Durchmessern des in das Dreieck MNP und um das Dreieck ABC beschriebenen Kreises, sammt dem doppelten Quadrat vom letzten Durchmesser.

Mit Hülfe des vorigen §. wird man leicht erkennen, daß dieser Satz kein anderer ist, als der erste im §. 16. behauptete und nur in das gegenwärtig betrachtete System übersetzt ist.

§. 28.

Multiplicirt man jede der beiden in §. 6. gefundenen Relationen beiderseits durch 2, und zieht die zweite von der ersten ab, so erhält man nach §. 5.:

$$2(ab+ac+bc)-a^2-b^2-c^2=4r(r+4R),$$

und wenn man auf beiden Seiten dieser Gleichung $2(a^2+b^2+c^2)$ hinzuthut, in der zweiten Seite aber den im vorigen §. gefundenen Werth $a^2+b^2+c^2=4R(\rho+2R)$ setzt, so hat man $(a+b+c)^2=4r(r+4R)+8R(\rho+2R)$; welchen Werth von $(a+b+c)^2$ man in der §. 7. gefundenen Relation $r'^2+r''^2+r'''^2=(r+4R)^2-\frac{1}{2}(a+b+c)^2$ substituire, woraus sich alsdann ergiebt $r'^2+r''^2+r'''^2=8R^2-r^2-4\rho R$, oder:

$$r^2+r'^2+r''^2+r'''^2=4R(2R-\rho)=8R^2-4\rho R$$

d. h. In jedem spitzwinkligen Dreieck ABC ist die Summe der Quadrate von den Halbmessern seiner vier berührenden Kreise gleich dem doppelten Quadrate vom Durchmesser des umbeschriebenen Kreises, weniger dem Rechteck aus diesem Durchmesser in den Durchmesser des in das Dreieck MNP beschriebenen.

§. 29.

Addirt man die so eben erhaltene Gleichung zu der in §. 27. entwickelten, so ergiebt sich sogleich:

$$a^2+b^2+c^2+r^2+r'^2+r''^2+r'''^2=16R^2$$

d. h. In jedem Dreieck ist die Summe der Quadrate von seinen drei Seiten und den Halbmessern seiner vier berührenden Kreise gleich dem vierfachen Quadrat vom Durchmesser des umbeschriebenen Kreises.

§. 30.

Fig. 4. Fällt man aus den Winkelpunkten A, B, C des Dreiecks ABC auf die denselben gegenüberliegenden Seiten NP, MP, MN des Dreiecks MNP die Senkrechten Am, Bn,

Cp, so ist $Am = \frac{2 \triangle ANP}{NP}$ und, da aus §. 19. 23. $NP = a \cos\alpha$ und $\triangle ANP = \triangle \cos\alpha^2$, so kommt:

$$Am = \frac{2 \triangle \cos\alpha}{a}; \text{ eben so } Bn = \frac{2 \triangle \cos\beta}{b}, \text{ und } Cp = \frac{2 \triangle \cos\gamma}{c}.$$

Addirt man diese drei Ausdrücke, so kommt, weil:

$$ab \cos\gamma + ac \cos\beta + bc \cos\alpha = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2),$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 4 R (Am + Bn + Cp)$$

d. h. Die Summe der Quadrate von den Seiten des Dreiecks ABC ist gleich dem doppelten Rechteck aus dem Durchmesser seines umbeschriebenen Kreises in die Summe aus den drei Abständen seiner Winkelpunkte von den diesen gegenüberliegenden Seiten des Dreiecks MNP.

In Verbindung mit §. 27. ergiebt sich hieraus sogleich noch:

$$Am + Bn + Cp = \rho + 2 R;$$

welche beide hier gefundenen Relationen vollkommen mit den in §. 16. 5. gegebenen übereinstimmen, wenn man nur bedenkt, daß die Senkrechten Am, Bn, Cp nichts anderes sind, als die Halbmesser $\overset{(1)}{\rho}, \overset{(2)}{\rho}, \overset{(3)}{\rho}$ (§. 24.) der ausserhalb berührenden Kreise des Dreiecks MNP, und daß der Halbmesser des um das Dreieck MNP beschriebenen Kreises gleich $\frac{1}{2}$ R ist (§. 26.). Man wird nach dieser Bemerkung unmittelbar aus §. 2. 5. 4. 7. noch folgende Relationen erhalten, wobei ich erinnere, daß (§. 20.) $Q = \frac{1}{2}(MN + MP + NP)$:

$$\rho \,.\, Am \,.\, Bn \,.\, Cp = \overline{\triangle MNP}^2$$

$$Am \,.\, Bn + Am \,.\, Cp + Bn \,.\, Cp = Q^2$$

$$Am \,.\, Bn \,.\, Cp = \rho Q^2 = Q \,.\, \triangle MNP$$

$$\overline{Am}^2 + \overline{Bn}^2 + \overline{Cp}^2 = (\rho + 2 R)^2 - 2 Q^2$$

§. 31.

Multiplicirt man die in §. 19. gegebenen Werthe der Seiten des Dreiecks MNP in einander, ferner die Abschnitte $AP = b \cos\alpha$, $BM = c \cos\beta$, $CN = a \cos\gamma$, so wie auch die $BP = a \cos\beta$, $CM = b \cos\gamma$, $AN = c \cos\alpha$, so kommt, weil §. 23. 24. $\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma = \frac{MNP}{2 \triangle} = \frac{\rho}{2 R}$: Fig. 2.

$$AP \,.\, BM \,.\, CN = AN \,.\, BP \,.\, CM = MN \,.\, MP \,.\, NP = 2 R \,.\, \triangle MNP = 2 \rho$$

h. d. Die drei senkrechten Parallelepipeden:

1.) aus dreien der sechs Abschnitte AN, AP, BM, BP, CM, CN, so genommen, daß keiner derselben mit einem der beiden übrigen einen gemeinschaftlichen Punkt hat;

2.) aus den drei übrigen dieser sechs Abschnitte;

3.) aus den drei Seiten des Dreiecks MNP;

sind alle von einerlei Rauminhalt: und zwar gleich dem senkrechten Prisma, dessen Grundfläche entweder das Dreieck MNP oder ABC ist, und dessen Höhe im ersten Falle der Durchmesser des um das Dreieck ABC im zweiten aber des in das Dreieck MNP beschriebenen Kreises ist.

Die Eigenschaft AP . BM . CN = AN . BP . CM ist schon durch einen allgemeineren Satz von Johann Bernoulli (Op. Tom. IV. pag. 33.) bewiesen. Carnot beweist ihn ebenfalls in einer Abhandlung über neue Eigenschaften der Vielecke, die sich in Bossut's Cours de mathematiques An. IX.—1800, pag. 401 u. f. findet, und, von Schellig ins Teutsche übersetzt, Dresden, 1802, besonders gedruckt erschienen ist.

Die Gleichheit der drei ersten Producte kann übrigens hier auch aus der Betrachtung gezogen werden, daß die Dreiecke ANP, BMP, CMN sämmtlich dem Dreiecke ABC ähnlich sind; was leicht erhellet, da sich um die Vierecke ANOP, CMON Kreise beschreiben lassen, und also der Winkel APN = ACB u. s. w.

§. 32.

Weil der Winkel AOP = ABC, so ist $AO = \frac{AP}{\sin\beta}$ und, da $AP = b\cos\alpha$ und $\sin\beta = \frac{b}{2R}$, so wird:

$$AO = 2R\cos\alpha;\ \text{eben so}\ BO = 2R\cos\beta,\ \text{und}\ CO = 2R\cos\gamma;$$

also $AO + BO + CO = 2R(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)$; und wenn man diese Cosinus durch die Seiten ausdrückt, so kommt, weil:

$$a(-a^2+b^2+c^2) + b(a^2-b^2+c^2) + c(a^2+b^2-c^2) = (-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) + 2abc,$$

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = \frac{r+R}{R};$$

folglich:
$$AO + BO + CO = 2(r+R)$$

d. h. In jedem spitzwinkligen Dreieck ist die Summe aus den drei Abständen des Durchschnittspunkts seiner Perpendikel von seinen Winkelpunkten, gleich der Summe aus den beiden Durchmessern des ein- und umbeschriebenen Kreises.

Ist das Dreieck stumpfwinklig z. B. bei C, so ist $CO = -2R\cos\gamma$, folglich alsdann $AO + BO - CO = 2(r + R)$.

Dieser Satz findet sich schon in Carnot's Geometrie der Stellung (s. Schumacher's Übersetzung pag. 272. Altona, 1810). Wir werden unten §. 71. 73. auch die Summe der Abstände dieses Punkts O von den Seiten des Dreiecks durch Kreishalbmesser ausgedrückt erhalten.

§. 33.

Es ist $a^2 + \overline{AO}^2 = a^2 + 4R^2\cos\alpha^2$, und wenn man $\cos\alpha$ durch die Seiten ausdrückt, so kommt, weil $16\Delta^2 + (-a^2+b^2+c^2)^2 = 4b^2c^2$ ist, $a^2 + \overline{AO}^2 = 4R^2$, welchen nämlichen Werth man eben so für $b^2 + \overline{BO}^2$ und $c^2 + \overline{CO}^2$ finden wird, so daß also:

$$a^2 + \overline{AO}^2 = b^2 + \overline{BO}^2 = c^2 + \overline{CO}^2 = 4R^2$$

d. h. In jedem Dreieck ist das Quadrat jeder seiner Seiten, sammt dem Quadrat vom Abstande des gegenüberliegenden Winkelpunkts vom Durchschnittspunkt seiner Perpendikel, gleich dem Quadrat vom Durchmesser des umbeschriebenen Kreises.

§. 34.

Aus den im vorigen §. erhaltenen Gleichungen ergiebt sich sogleich:

$$a^2 + b^2 + c^2 + \overline{AO}^2 + \overline{BO}^2 + \overline{CO}^2 = 12R^2$$

und wenn man hiervon die in §. 27. erhaltene $a^2 + b^2 + c^2 = 4\rho R + 8R^2$ abzieht:

$$\overline{AO}^2 + \overline{BO}^2 + \overline{CO}^2 = 4R(R - \rho) = 4R^2 - 4\rho R$$

d. h. Die Summe der Quadrate von den drei Abständen der Winkelpunkte eines Dreiecks ABC vom Durchschnittspunkte seiner Perpendikel, ist gleich dem Quadrate vom Durchmesser des umbeschriebenen Kreises, weniger dem Rechteck aus diesem Durchmesser in den Durchmesser des in das Dreieck MNP beschriebenen.

§. 35.

Es ist $OM = BO \cdot \cos\gamma$ und, da aus §. 32. $BO = 2R \cos\beta$, so ist:
$OM = 2R \cos\beta \cos\gamma$; eben so $ON = 2R \cos\alpha \cos\gamma$, und $OP = 2R \cos\alpha \cos\beta$.

Multiplicirt man diese Werthe der Ordnung nach in die von AO, BO, CO (§. 32.), so kommt, weil $\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma = \frac{\rho}{2R}$ (§. 24.)

$$AO \cdot OM = BO \cdot ON = CO \cdot OP = 2\rho R$$

d. h. Der Durchschnittspunkt O der drei Perpendikel des Dreiecks ABC theilt jeden derselben in zwei solche Theile, daß das Rechteck aus ihnen gleich ist dem doppelten Rechteck aus den beiden Halbmessern des in das Dreieck MNP und um das Dreieck ABC beschriebenen Kreises.

§. 36.

Multiplicirt man die Werthe der OM, ON, OP so wie der AO, BO, CO in einander, so kommt:

$$OM \cdot ON \cdot OP = 2\rho^2 R \quad \ldots \quad (1)$$
$$AO \cdot BO \cdot CO = 4\rho R^2 \quad \ldots \quad (2)$$

d. h. 1.) Das senkrechte Parallelepiped aus den drei Abständen des Punkts O von den Seiten des Dreiecks ABC ist gleich dem senkrechten Parallelepiped, dessen Höhe der Durchmesser des umbeschriebenen Kreises ist, und dessen Grundfläche das Quadrat vom Halbmesser des in das Dreieck MNP beschriebenen.

2.) Das senkrechte Parallelepiped aus den drei Abständen des Punkts O von den Winkelpunkten des Dreiecks ABC ist gleich dem senkrechten Parallelepiped, dessen Grundfläche das Quadrat vom Durchmesser des umbeschriebenen Kreises ist, und dessen Höhe der Halbmesser des in das Dreieck MNP beschriebenen.

Zugleich ergiebt sich das Verhältniß dieser beiden Parallelepipeden:

$$OM \cdot ON \cdot OP : AO \cdot BO \cdot CO = \rho : 2R = \triangle MNP : 2\triangle.$$

Da ferner aus §. 4. 24. $\overset{(1)}{\rho}\,\overset{(2)}{\rho}\,\overset{(3)}{\rho} = \frac{1}{2}(MN + MP + NP) \triangle MNP$ und aus §. 21. $AM \cdot BN \cdot CP = (MN + MP + NP) \triangle$, so folgt auch: $\overset{(1)}{\rho}\,\overset{(2)}{\rho}\,\overset{(3)}{\rho} : AM \cdot BN \cdot CP = \triangle MNP : 2\triangle$, also:

$$OM . ON . OP : AO . BO . CO = \overset{(1)}{\rho}\,\overset{(2)}{\rho}\,\overset{(3)}{\rho} : AM . BN . CP$$

d. h. Die oben beschriebenen Parallelepipeden verhalten sich zu einander, und zwar das erste verhält sich zum zweiten, wie das senkrechte Parallelepiped aus den Halbmessern der drei ausserhalb berührenden Kreise des Dreiecks MNP zu dem senkrechten Parallelepipede aus den drei Perpendikeln des Dreiecks ABC.

Wenn man bedenkt, daß die Geraden AO, BO, CO zugleich die Durchmesser der um die Dreiecke NPO, MPO, MNO beschriebenen Kreise sind, und die Geraden OM, ON, OP zugleich die Abstände der Winkelpunkte des Dreiecks MNP vom Mittelpunkt O des in dasselbe beschriebenen Kreises; so wird man leicht mit Hülfe des §. 26. die Übereinstimmung der beiden ersten Relationen mit den ersten in §. 11. und §. 12., so wie der Relationen der §§. 33. 34. mit denen der §§. 17. 16. bemerken.

§. 37.

Wenn man die Werthe der Geraden AO, BO, CO (§. 32.) zusammen addirt und auch die Produkte aus je zweien derselben, ferner das nämliche mit den Geraden OM, ON, OP (§. 35.) verrichtet, so ergiebt sich, weil $\rho = 2R \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma$ (§. 24.):

$$AO . BO + AO . CO + BO . CO = 2R\,(OM + ON + OP) \quad . \; . \; . \quad (1)$$
$$OM . ON + OM . OP + ON . OP = \rho\,(AO + BO + CO) \quad . \; . \; . \quad (2)$$

d. h. In jedem spitzwinkligen Dreieck ABC ist:

1.) Die Summe der drei Rechtecke aus je zweien Abständen des Punkts O von seinen Winkelpunkten, gleich dem Rechteck aus der Summe der Abstände dieses Punkts von seinen Seiten in den Durchmesser des umbeschriebenen Kreises;

2.) die Summe der drei Rechtecke aus je zweien Abständen des Punkts O von seinen Seiten, gleich dem Rechteck aus der Summe der Abstände dieses Punkts von seinen Winkelpunkten in den Halbmesser des in das Dreieck MNP beschriebenen Kreises.

Für ein z. B. bei A stumpfwinkliges Dreieck verwandeln sich diese Relationen in folgende:

$$-AO.BO-AO.CO+BO.CO = 2R(OM-ON-OP)$$
$$OM.ON+OM.OP-ON.OP = \overset{(1)}{\rho}(-AO+BO+CO)$$

§. 38.

Es ist $\cos\alpha\cos\beta+\cos\alpha\cos\gamma+\cos\beta\cos\gamma=\frac{1}{2}(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)^2-\frac{1}{2}(\cos\alpha^2+\cos\beta^2+\cos\gamma^2)$. Nun ist aber (§. 32.) $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=\frac{r+R}{R}$ und (§. 23. 24.) $\cos\alpha^2+\cos\beta^2+\cos\gamma^2=1-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=\frac{R-\rho}{R}$; folglich:

$$\cos\alpha\cos\beta+\cos\alpha\cos\gamma+\cos\beta\cos\gamma=\frac{r^2+R(\rho+2r)}{2R^2}.$$

Addirt man demnach die in §. 35. gegebenen Werthe der OM, ON, OP, so wird:

$$R(OM+ON+OP)=r^2+R(\rho+2r)$$

d. h. In jedem spitzwinkligen Dreieck ABC ist das Rechteck aus der Summe der drei Abstände des Punkts O von seinen Seiten in den Halbmesser des umbeschriebenen Kreises, gleich dem Quadrat vom Halbmesser des einbeschriebenen, sammt dem Rechteck aus jenem Halbmesser in das Doppelte von diesem, sammt dem Halbmesser des in das Dreieck MNP beschriebenen Kreises.

Für ein z. B. bei A stumpfwinkliges Dreieck ABC gilt diese Relation:

$$R(OM-ON-OP)=r^2+R(2r-\overset{(1)}{\rho})$$

§. 39.

Es ist:

$$\cos\alpha^2\cos\beta^2+\cos\alpha^2\cos\gamma^2+\cos\beta^2\cos\gamma^2=(\cos\alpha\cos\beta+\cos\alpha\cos\gamma+\cos\beta\cos\gamma)^2$$
$$-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma).$$

Substituirt man in der zweiten Seite dieser Gleichheit die aus §. 38. 32. 24. bekannten Ausdrücke der Kreishalbmesser, so kommt:

$$\cos\alpha^2\cos\beta^2+\cos\alpha^2\cos\gamma^2+\cos\beta^2\cos\gamma^2=$$
$$\frac{r^2[r(r+4R)+2R(\rho+2R)]-\rho R^2(4R-\rho)}{4R^4}.$$

Nun ist aber nach §. 5. 27. 6. 2° $r(r+4R)+2R(\rho+2R)=r'r''+r'r'''+r''r'''$, und nach §. 4. 2. $r^2(r'r''+r'r'''+r''r''')=\Delta^2$; folglich reduzirt sich obiger Ausdruck auf diesen:

$$\cos\alpha^2 \cos\beta^2 + \cos\alpha^2 \cos\gamma^2 + \cos\beta^2 \cos\gamma^2 = \frac{\Delta^2 - \rho R^3 (4R - \rho)}{4R^4}.$$

Stellt man nun die Summe $\overline{OM}^2 + \overline{ON}^2 + \overline{OP}^2$ durch die in §. 35. gegebenen Werthe dieser Linien dar, und substituirt alsdann den so eben entwickelten Ausdruck, so ergiebt sich, weil (§. 20.) $\Delta = QR$ ist;

$$\overline{OM}^2 + \overline{ON}^2 + \overline{OP}^2 = Q^2 - \rho(4R - \rho)$$

und, da auch $Q = \frac{1}{2}(MN + MP + NP)$, so entsteht hieraus der Satz:

In jedem spitzwinkligen Dreieck ABC ist die Summe der Quadrate von den Abständen des Punkts O von seinen Seiten, gleich dem Quadrat vom halben Umfang des Dreiecks MNP, weniger dem Rechteck aus dem Überschuß des doppelten Durchmessers des um das Dreieck ABC beschriebenen Kreises über den Halbmesser des in das Dreieck MNP beschriebenen Kreises, in den letzten Halbmesser.

§. 40.

Weil $AB \cdot AO \cdot BO = 4cR^2 \cos\alpha \cos\beta$ und $\triangle ABO = cR \cos\alpha \cos\beta$, so folgt, daß der Halbmesser des um das Dreieck ABO beschriebenen Kreises $= \frac{AB.AO.BO}{4\triangle ABO} = R$, welchen Werth man eben so für jeden Halbmesser der um die Dreiecke ACO, BCO beschriebenen Kreise findet; woher man den Satz erhält:

Die drei Winkelpunkte eines jeden Dreiecks sammt dem Durchschnittspunkt seiner Perpendikel sind vier solche Punkte, daß die Kreise durch je drei derselben alle von gleicher Grösse sind.

Da wir aus §. 1. wissen, daß, wenn für ein beliebiges Dreieck MNP die Punkte A, B, C der Ordnung nach die Mittelpunkte der ausserhalb berührenden in den Ebenen der Winkel NMP, MNP, NPM befindlichen Kreise sind, und O der Mittelpunkt des innerhalb berührenden, die Geraden AM, BN, CP sich im Punkt O schneiden, und daß die Punkte M, N, P zugleich die Fußpunkte der Perpendikel im Dreieck ABC sind; so wird man leicht erkennen, daß durch den so eben bewiesenen Satz zugleich auch dieser dargethan ist:

In jedem Dreieck haben die Mittelpunkte seiner vier berührenden Kreise eine solche Lage zu einander, daß die Kreise durch je drei derselben alle von gleicher Grösse sind.

§. 41.

Fig. 5. Wenn M′, N′, P′ die Durchschnittspunkte der Perpendikel in den Dreiecken ANP, BMP, CMN vorstellen, und man zieht aus denselben der Ordnung nach an die Winkelpunkte A, B, C des Dreiecks ABC die Geraden AM′, BN′, CP′, so ist nach §. 32., weil AO zugleich der Durchmesser des um das Dreieck ANP beschriebenen Kreises ist, $AM' = AO \cos\alpha$; also, da $AO = 2R\cos\alpha$:

$$AM' = 2R\cos\alpha^2;\ \text{eben so}\ BN' = 2R\cos\beta^2,\ \text{und}\ CP' = 2R\cos\gamma^2.$$

Addirt man diese drei Werthe, so kommt, weil $\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = \frac{R-\rho}{R}$:

$$AM' + BN' + CP' = 2(R-\rho)$$

d. h. Die Summe aus den drei Abständen der Winkelpunkte A, B, C des Dreiecks ABC von den Durchschnittspunkten der Perpendikel in den Dreiecken ANP, BMP, CMN, ist gleich dem Durchmesser des um das Dreieck ABC beschriebenen Kreises, weniger dem Durchmesser des in das Dreieck MNP beschriebenen.

§. 42.

Es ist $AM'.BN' = 4R^2\cos\alpha^2\cos\beta^2$ und aus §. 35. $OP = 2R\cos\alpha\cos\beta$, folglich:
$$AM'.BN' = \overline{OP}^2$$
Eben so findet sich:
$$AM'.CP' = \overline{ON}^2$$
Und:
$$BN'.CP' = \overline{OM}^2$$

d. h. Der Durchschnittspunkt O der Perpendikel im Dreieck ABC hat die Beschaffenheit, daß das Quadrat seines Abstands von irgend einer Seite AB gleich ist dem Rechteck aus den Abständen der, dieser Seite anliegenden, Winkelpunkte A, B von den Durchschnittspunkten M′, N′ der Perpendikel in den Dreiecken ANP, BMP.

Multiplicirt man diese drei Gleichheiten in einander, so folgt auch:

$$OM.ON.OP = AM'.BN'.CP'$$

d. h. Das senkrechte Parallelepiped aus den drei Abständen des Punkts O von den Seiten des Dreiecks ABC, ist gleich dem senkrechten Parallelepiped aus den drei Abständen der Winkelpunkte A, B, C von den Durchschnittspunkten M′, N′, P′ der Perpendikel in den Dreiecken ANP, BMP, CMN.

§. 43.

Da wir in §. 34. gefunden haben, daß $\overline{AO}^2 + \overline{BO}^2 + \overline{CO}^2 = 4R(R - \rho)$, so kommt in Verbindung mit §. 41.:

$$\overline{AO}^2 + \overline{BO}^2 + \overline{CO}^2 = 2R(AM' + BN' + CP')$$

d. h. Die Summe der Quadrate von den Abständen des Punktes O von den Winkelpunkten A, B, C des Dreiecks ABC, ist gleich dem Rechteck aus der Summe der Abstände dieser Winkelpunkte von den Durchschnittspunkten der Perpendikel in den Dreiecken ANP, BMP, CMN, in den Durchmesser des um das Dreieck ABC beschriebenen Kreises.

§. 44.

Es ist $\overline{AM'}^2 + \overline{BN'}^2 + \overline{CP'}^2 = (AM' + BN' + CP')^2 - 2(AM'.BN' + AM'.CP' + BN'.CP)$, allein aus §. 42. 39. hat man $AM'.BN' + AM'.CP' + BN'.CP' = Q^2 - \rho(4R - \rho)$ und aus §. 41. $AM' + BN' + CP' = 2(R - \rho)$, folglich:

$$\overline{AM'}^2 + \overline{BN'}^2 + \overline{CP'}^2 = 4R^2 + 2(\rho^2 + Q^2)$$

d. h. Die Summe der Quadrate von den Abständen der Punkte M', N', P' von den Winkelpunkten A, B, C des Dreiecks ABC, ist gleich dem Quadrat vom Durchmesser des um dasselbe beschriebenen Kreises, sammt dem doppelten Quadrat vom Halbmesser des in das Dreieck MNP beschriebenen, sammt dem halben Quadrat vom Umfange dieses Dreiecks.

Dritter Abschnitt.

Vom Mittelpunkte des Kreises, welcher um ein Dreieck beschrieben ist.

§. 45.

Fig. 6. Wenn K der Mittelpunkt des um das beliebige Dreieck ABC beschriebenen Kreises ist, und man fällt aus demselben auf die Seiten BC, AC, AB die Senkrechten Ka, Kb, Kc, so ist, wenn man AK zieht, $Kc = AK . \cos AKc$; und, weil $AK = R$ und der Winkel $AKc = ACB$, so wird:

$$Kc = R \cos \gamma; \text{ eben so } Kb = R \cos \beta, \text{ und } Ka = R \cos \alpha.$$

Vergleicht man diese Werthe mit den in §. 32. gefundenen der Geraden AO, BO, CO, wo O wie bisher der Durchschnittspunkt der Perpendikel AM, BN, CP im Dreiecke ABC, so ergiebt sich sogleich:

$$AO = 2Ka$$
$$BO = 2Kb$$
$$CO = 2Kc$$

d. h. In jedem Dreieck ist der Abstand des Mittelpunkts des umbeschriebenen Kreises von irgend einer Seite desselben halb so groß, als der Abstand des Durchschnittspunkts seiner Perpendikel von dem dieser Seite gegenüberliegenden Winkelpunkte.

§. 46.

Substituirt man demnach in §. 32. 33. 34. 45. 36. (2) statt der Geraden AO, BO, CO jene doppelten Senkrechten Ka, Kb, Kc, so erhält man folgende Relationen:

$$Ka + Kb + Kc = r + R \quad \ldots \quad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l} a^2 + 4\overline{Ka}^2 = 4R^2 \\ b^2 + 4\overline{Kb}^2 = 4R^2 \\ c^2 + 4\overline{Kc}^2 = 4R^2 \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (2)$$

$$\overline{Ka}^2 + \overline{Kb}^2 + \overline{Kc}^2 = R^2 - \rho R \quad \ldots \quad (3)$$

$$OM . Ka = ON . Kb = OP . Kc = \rho R \quad \ldots \quad (4)$$

$$Ka . Kb . Kc = \frac{1}{2} \rho R^2 \quad \ldots \quad (5)$$

d. h. Den drei Abständen des Mittelpunkts des um das Dreieck ABC beschriebenen Kreises von den Seiten dieses Dreiecks kommen folgende Eigenschaften zu:

1.) Ihre Summe ist gleich der Summe der Halbmesser vom ein- und umbeschrieben Kreise.

2.) Das Quadrat jeder Seite eines Dreiecks sammt dem vierfachen Quadrat ihres Abstands vom Mittelpunkt des umbeschriebenen Kreises, ist gleich dem Quadrat vom Durchmesser dieses Kreises.

3.) Die Summe ihrer Quadrate ist gleich dem Quadrat vom Halbmesser des umbeschriebenen Kreises, weniger dem Rechteck aus diesem Halbmesser in den Halbmesser des in das Dreieck MNP beschriebenen Kreises.

4.) Das Rechteck aus irgend einem dieser Abstände in den Abstand der nämlichen Seite vom Durchschnittspunkt der Perpendikel im Dreieck ABC, ist gleich dem Rechteck aus den Halbmessern des in das Dreieck MNP und um das Dreieck ABC beschriebenen Kreises.

5.) Das senkrechte Parallelepiped aus ihnen ist halb so groß als das senkrechte Parallelepiped, dessen Grundfläche das Quadrat vom Halbmesser des umbeschriebenen Kreises ist, und dessen Höhe der Halbmesser des in das Dreieck MNP beschriebenen.

Die erste dieser Relationen, so wie der Satz im vorigen §., findet sich schon in Carnot's Geometrie der Stellung.

§. 47.

Bezeichnet man die Halbmesser der um die Dreiecke BCK, ACK, ABK beschriebenen Kreise der Ordnung nach durch R', R'', R''', so ist $R' = \frac{aR^2}{4\triangle BCK}$ und, weil $\triangle BCK = \frac{1}{2}\, aR\cos\alpha$, so kommt:

$$R' = \frac{R}{2\cos\alpha}; \text{ eben so } R'' = \frac{R}{2\cos\beta}, \text{ und } R''' = \frac{R}{2\cos\gamma}.$$

Multiplicirt man diese Werthe in die von Ka, Kb, Kc, so wird:

$$2R'.Ka = 2R''.Kb = 2R'''.Kc = R^2$$

d. h. In jedem Dreieck ist das Rechteck aus dem Abstand des Mittelpunk-

tes des umbeschriebenen Kreises von irgend einer Seite desselben in den Durchmesser des Kreises, welcher durch die Endpunkte dieser Seite und den genannten Mittelpunkt geht, jedesmal gleich dem Quadrate vom Halbmesser jenes umbeschriebenen Kreises.

Setzt man in diesen Gleichheiten statt Ka, Kb, Kc die gleichgeltenden Werthe $\frac{1}{2}$ AO, $\frac{1}{2}$ BO, $\frac{1}{2}$ CO, so hat man auch:

$$R'.AO = R''.BO = R'''.CO = R^2$$

d. h. In jedem Dreieck ist das Rechteck aus dem Abstande des Durchschnittspunkts seiner Perpendikel von irgend einem seiner Winkelpunkte in den Halbmesser des Kreises, welcher durch die beiden andern Winkelpunkte und den Mittelpunkt des umbeschriebenen Kreises geht, gleich dem Quadrate vom Halbmesser dieses umbeschriebenen.

§. 48.

Addirt man diese Halbmesser R', R'', R''', so erhält man, weil $\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma = \frac{\rho}{2R}$ und (§. 38.) $\cos\alpha \cos\beta + \cos\alpha \cos\gamma + \cos\beta \cos\gamma = \frac{r^2 + R(\rho + 2r)}{2R^2}$:

$$2\rho(R' + R'' + R''') = r^2 + R(\rho + 2r)$$

welchen nämlichen Werth wir oben §. 38. für R (OM + ON + OP) gefunden haben, so daß also:

$$R' + R'' + R''' : OM + ON + OP = R : 2\rho$$

d. h. In jedem spitzwinkligen Dreieck verhält sich die Summe der Halbmesser derjenigen drei Kreise, welche durch je zwei Winkelpunkte und den Mittelpunkt des umbeschriebenen Kreises gehen, zur Summe der Abstände des Durchschnittspunkts seiner Perpendikel von seinen Seiten, wie sich verhält der Halbmesser jenes umbeschriebenen Kreises zum Durchmesser desjenigen Kreises, welcher in das durch die Fußpunkte jener Perpendikel bestimmte Dreieck beschrieben ist.

Für ein z. B. bei A stumpfwinkliges Dreieck ABC ist

$$R'' + R''' - R' : OM - ON - OP = R : 2\overset{(1)}{\rho}.$$

Vierter Abschnitt.

Bestimmung der gegenseitigen Lage der vornehmsten bisher betrachteten Punkte.

§. 49.

Wenn K und S die Mittelpunkte der um und in das Dreieck ABC beschriebenen Kreise Fig. 7. sind, und man fällt aus denselben auf die Seite AB die Senkrechten Kc, SF, so ist:

$$\overline{KS}^2 = (Ac - AF)^2 + (SF - Kc)^2.$$

Nun ist aber $Ac = \frac{1}{2} c$ und $AF = \frac{1}{2}(-a + b + c)$, folglich:

$$Ac - AF = \frac{1}{2}(a - b);$$

ferner weil (§. 2.) $SF = \frac{2\Delta}{a+b+c}$ und (§. 45.) $Kc = \frac{c(a^2+b^2-c^2)}{8\Delta}$, so ist:

$$SF - Kc = \frac{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) - c(a^2+b^2-c^2)}{8\Delta}.$$

Substituirt man nun in obigem Ausdruck für $\overline{KS}^2$, so erhält man nach gehöriger Entwicklung:

$$\overline{KS}^2 = \frac{a^2 b^2 c^2 - abc(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{16\Delta^2};$$

woraus sich durch die bekannten Werthe der Kreishalbmesser r und R ergiebt:

$$\overline{KS}^2 = R^2 - 2rR$$

d. h. In jedem Dreieck ist das Quadrat vom Abstande der beiden Mittelpunkte des ein- und umbeschriebenen Kreises von einander, gleich dem Quadrat vom Halbmesser des umbeschriebenen Kreises, weniger dem doppelten Rechteck aus diesem Halbmesser in den Halbmesser des einbeschriebenen.

Wenn ferner eben so wie in §. 1. S,′ S″, S‴ die Mittelpunkte der ausserhalb berührenden Kreise des Dreiecks ABC sind, so wird man die Abstände derselben vom Punkte K erhalten, wenn man in dem so eben gefundenen Ausdruck nach und nach a, b, c negativ setzt; woher sich ergiebt:

$$\overline{KS'}^2 = R^2 + 2r' R$$
$$\overline{KS''}^2 = R^2 + 2r'' R$$
$$\overline{KS'''}^2 = R^2 + 2r''' R$$

d. h. In jedem Dreieck ist das Quadrat vom Abstande des Mittelpunkts des umbeschriebenen Kreises vom Mittelpunkte irgend eines seiner ausserhalb berührenden Kreise, gleich dem Quadrat vom Halbmesser jenes Kreises, sammt dem doppelten Rechteck aus diesem Halbmesser in den Halbmesser jenes ausserhalb berührenden Kreises.

Den ersten Satz $\overline{KS}^2 = R^2 - 2rR$ beweist L'Huilier in Nro. V. der vorhin angeführten Annales auf eine sehr mühsame und weitläufige Art. Er ist ursprünglich von Euler und befindet sich in einer Abhandlung: Solutio facilis problematum quorundam geometricorum difficillimorum. Nov. Commentar. Petrop. T. XI. p. A. 1765. §. 18. VI. Fuß beweist ihn rein geometrisch und sehr einfach (de quadrilateris, quibus circulus tam inscribere quam circumscribere licet; Nov. Act. Petrop. T. X. Petrop. 1797. p. 103. §. 32.). Euler bestimmt in erwähnter Abhandlung für das geradlinige Dreieck die gegenseitige Lage des Durchschnittspunkts seiner Perpendikel, seines Schwerpunkts, so wie der Mittelpunkte des ein- und umbeschriebenen Kreises, aus den Seiten des Dreiecks. Da er indessen den Halbmesser ρ nicht in den Kalkul eingeführt hat, so konnte er für die Bestimmung der übrigen Abstände nicht auf ähnliche einfache Resultate und geometrische Sätze kommen, wie wir sie hier entwickeln werden.

§. 50.

Addirt man die gefundenen Werthe der Quadrate von KS, KS′, KS″, KS‴, so kommt, weil (§. 5.) $r' + r'' + r''' = r + 4R$:

$$\overline{KS}^2 + \overline{KS'}^2 + \overline{KS''}^2 + \overline{KS'''}^2 = 12 R^2$$

d. h. In jedem Dreieck liegt der Mittelpunkt des umbeschriebenen Kreises also, daß die Summe der Quadrate seiner Abstände von den Mittelpunkten der vier berührenden Kreise gleich ist, dem dreifachen Quadrate vom Durchmesser des umbeschriebenen Kreises.

§. 51.

Wenn O wie bisher der Durchschnittspunkt der Perpendikel AM, BN, CP des Dreiecks ABC ist, und man zieht OS, so ist:

$$\overline{OS}^2 = (AF - AP)^2 + (OP - SF)^2.$$

Nun ist aber $AF = \frac{1}{2}(-a+b+c)$ und $AP = \frac{-a^2+b^2+c^2}{2c}$, folglich:

$$AF - AP = \frac{(a-b+c)(a+b-c) - c(a+b-c)}{2c};$$

ferner, weil (§. 35.) $OP = \frac{(-a^2+b^2+c^2)(a^2-b^2+c^2)}{8c\Delta}$, und (§. 2.) $SF = \frac{2\Delta}{a+b+c}$, so ist:

$$OP - SF = \frac{(-a^2+b^2+c^2)(a^2-b^2+c^2) - c(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{8c\Delta}.$$

Substituirt man nun im Ausdrucke für $\overline{OS}^2$, so wird man denselben endlich in diese Form bringen können:

$$\overline{OS}^2 = \frac{(-a+b+c)^2(a-b+c)^2(a+b-c)^2 - (-a^2+b^2+c^2)(a^2-b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)}{32\Delta^2},$$

woraus sich durch Einführung der Kreishalbmesser r, ρ, R ergiebt:

$$\overline{OS}^2 = 2r^2 - 2\rho R$$

d. h. In jedem spitzwinkligen Dreieck ist das Quadrat vom Abstand des Durchschnittspunkts seiner Perpendikel vom Mittelpunkt des einbeschriebenen Kreises, gleich dem doppelten Quadrat vom Halbmesser dieses Kreises, weniger dem Rechteck aus dem Durchmesser des umbeschriebenen in den Halbmesser desjenigen Kreises, welcher in das durch die Fußpunkte jener Perpendikel bestimmte Dreieck beschrieben ist.

Setzt man in diesem Ausdruck nach einander a, b, c negativ, so erhält man für die Abstände des Punkts O, von den Mittelpunkten S', S'', S''' diese Ausdrücke:

$$\overline{OS'}^2 = 2r'^2 + 2\rho R$$
$$\overline{OS''}^2 = 2r''^2 + 2\rho R$$
$$\overline{OS'''}^2 = 2r'''^2 + 2\rho R$$

d. h. In jedem spitzwinkligen Dreieck ist das Quadrat vom Abstande des Durchschnittspunkts seiner Perpendikel vom Mittelpunkte irgend eines ausserhalb berührenden Kreises, gleich dem doppelten Quadrat vom Halbmesser dieses Kreises, sammt dem Rechteck aus dem Durchmesser des umbeschriebenen in den Halb-

messer desjenigen Kreises, welcher in das durch die Fußpunkte jener Perpendikel bestimmte Dreieck beschrieben ist.

Es wird keine Schwierigkeit haben, diese Sätze so wie die folgenden für das stumpfwinklige Dreieck umzuformen und auszudrücken, wenn man sich nur der in §. 24. beschriebenen Natur des Halbmessers ρ erinnert.

§. 52.

Addirt man die gefundenen Werthe der Quadrate von OS, OS′, OS″, OS‴, so kommt, weil (§. 28.) $r^2 + r'^2 + r''^2 + r'''^2 = 4R(2R - \rho)$:

$$\overline{OS}^2 + \overline{OS'}^2 + \overline{OS''}^2 + \overline{OS'''}^2 = 4R(4R - \rho)$$

d. h. In jedem spitzwinkligen Dreieck liegt der Durchschnittspunkt seiner Perpendikel also, daß die Summe der Quadrate seiner Abstände von den Mittelpunkten der vier berührenden Kreise, gleich ist dem Rechteck aus dem doppelten Durchmesser des umbeschriebenen Kreises in den Überschuß dieses doppelten Durchmessers über den Halbmesser desjenigen Kreises, welcher in das durch die Fußpunkte jener Perpendikel bestimmte Dreieck beschrieben ist.

§. 53.

Verbindet man die Punkte K, O durch eine Gerade, so ist das Quadrat derselben:

$$\overline{KO}^2 = (Ac - AP)^2 + (OP - Kc)^2.$$

Nun ist aber:
$$Ac - AP = \frac{a^2 - b^2}{2c},$$

und (§. 35. 45.)

$$OP - Kc = \frac{(-a^2 + b^2 + c^2)(a^2 - b^2 + c^2) - c^2(a^2 + b^2 - c^2)}{8c\Delta}.$$

Substituirt man demnach diese Werthe im Ausdruck für $\overline{KO}^2$, so wird derselbe nach gehöriger Bearbeitung in diese Form übergehn:

$$\overline{KO}^2 = \frac{a^2b^2c^2 - (-a^2 + b^2 + c^2)(a^2 - b^2 + c^2)(a^2 + b^2 - c^2)}{16\Delta^2},$$

woraus man erhält:
$$\overline{KO}^2 = R^2 - 4\rho R$$

d. h. In jedem spitzwinkligen Dreieck ist das Quadrat vom Abstand des Durchschnittspunkts seiner Perpendikel vom Mittelpunkte des umbeschriebenen

Kreises, gleich dem Quadrat vom Halbmesser dieses Kreises, weniger dem doppelten Rechteck aus eben diesem Halbmesser in den Durchmesser desjenigen Kreises, welcher in das durch die Fußpunkte jener Perpendikel bestimmte Dreieck beschrieben ist.

§. 54.

Man nehme L für den Mittelpunkt des um das Dreieck MNP beschriebenen Kreises, dessen Halbmesser (§. 26.) gleich $\frac{1}{2}R$ gefunden wurde, und ziehe die Gerade OL; so ist, weil O zugleich der Mittelpunkt des in das Dreieck MNP beschriebenen Kreises, (§. 49.) $\overline{OL}^2 = \frac{1}{4}R^2 - \rho R$ und, da wir so eben $\overline{KO}^2 = R^2 - 4\rho R$ hatten, so folgt $\overline{KO}^2 = 4\overline{OL}^2$ oder:

$$KO = 2\,OL.$$

Wäre das Dreieck ABC stumpfwinklig, z. B. bei A, so würde man aus den Werthen $\overline{OL}^2 = \frac{1}{4}R^2 + \overset{(1)}{\rho}R$ und $\overline{KO}^2 = R^2 + 4\overset{(1)}{\rho}R$ das nämliche Resultat finden, so daß man den Satz erhält:

In jedem Dreieck ist der Durchschnittspunkt seiner Perpendikel vom Mittelpunkt des umbeschriebenen Kreises noch einmal so weit entfernt als vom Mittelpunkte desjenigen Kreises, welcher durch die Fußpunkte jener Perpendikel geht.

§. 55.

Man fälle aus dem Mittelpunkte L auf die Geraden AB, CP die Senkrechten LJ, LH, so ist LJ = PH und, weil bei H ein rechter Winkel, so ist bekanntlich im Dreieck OPL, $PH = \frac{-\overline{OL}^2 + \overline{OP}^2 + \overline{LP}^2}{2\,OP}$. Nun ist aber $LP = \frac{1}{2}R$ und (§. 54.) $\overline{OL}^2 = \frac{1}{4}R^2 - \rho R$, ferner (§. 35. 45.) $OP \cdot Kc = \rho R$, folglich $\overline{LP}^2 - \overline{OL}^2 = OP \cdot Kc$. Substituirt man diesen Ausdruck in PH = LJ so ergiebt sich:

$$LJ = \frac{1}{2}(OP + Kc)$$

Aus welcher Eigenschaft man bekanntlich schließt, daß die Punkte O, L, K in ein und derselben geraden Linie liegen, und es erhellet der Satz:

In jedem Dreieck liegen der Mittelpunkt des umbeschriebenen Kreises, der

Durchschnittspunkt seiner Perpendikel und der Mittelpunkt des Kreises durch die Fußpunkte derselben in ein und derselben geraden Linie, deren Mitte zugleich letzter Punkt ist.

§. 56.

Weil also der Punkt L in der Mitte der Geraden KO liegt, so ist auch der Punkt J die Mitte der Geraden Pc, und, da hieraus $Lc = LP = \frac{1}{2} R$ folgt, und eben dieses auf gleiche Weise für die Seiten AC, BC statt findet, so entsteht der Satz:

In jedem Dreieck trifft der Kreis, welcher durch die Fußpunkte seiner Perpendikel geht, zugleich die Seiten desselben in ihren Mitten.

§. 57.

Wenn man die Gerade LS zieht, so ist bekanntlich im Dreieck KOS, weil L die Mitte von KO ist, $2\overline{LS}^2 + 2\overline{OL}^2 = \overline{KS}^2 + \overline{OS}^2$. Substituirt man hierin die aus §. 54. 49. 51. bekannten Werthe der Quadrate von OL, KS, OS, so kommt $\overline{LS}^2 = \frac{1}{4}R^2 - rR + r^2 = (\frac{1}{2}R - r)^2$ oder:

$$LS = \frac{1}{2}R - r,$$

Und wenn man hierin nach und nach a, b, c negativ setzt:

$$LS' = \frac{1}{2}R + r'$$

$$LS'' = \frac{1}{2}R + r''$$

$$LS''' = \frac{1}{2}R + r'''$$

Da nun (§. 26.) $\frac{1}{2}$ R der Halbmesser des um das Dreieck MNP beschriebenen Kreises selbst ist, so ergiebt sich hieraus nach einer bekannten Eigenschaft der Kreise, welche einander berühren, folgender Satz:

Der Kreis, welcher durch die Fußpunkte der Perpendikel eines Dreiecks geht, berührt alle vier die drei Seiten desselben berührenden Kreise, und zwar den innerhalb berührenden innerhalb, jeden der ausserhalb berührenden aber ausserhalb.

§. 58.

Nimmt man die gefundenen Werthe der Geraden LS, LS', LS'', LS''' zusammen, so wird (§. 5.):

$$LS + LS' + LS'' + LS''' = 6R$$

d. h. In jedem Dreieck liegt der Mittelpunkt des Kreises, welcher durch die Fußpunkte seiner Perpendikel geht, also, daß die Summe seiner Abstände von den Mittelpunkten der vier berührenden Kreise gleich ist, dem dreifachen Durchmesser des umbeschriebenen Kreises.

§. 59.

Erhebt man die Werthe der Geraden LS, LS', LS'', LS''' ins Quadrat, und addirt sie, so kommt (§. 28. 5.):

$$\overline{LS}^2 + \overline{LS'}^2 + \overline{LS''}^2 + \overline{LS'''}^2 = 15R^2 - 4\rho R;$$

folglich (§. 50. 53.):

$$\overline{KO}^2 + \overline{KS}^2 + \overline{KS'}^2 + \overline{KS''}^2 + \overline{KS'''}^2 = \overline{LS}^2 + \overline{LS'}^2 + \overline{LS''}^2 + \overline{LS'''}^2$$

d. h. weil $\overline{KO}^2 = 4\overline{KL}^2$: In jedem Dreieck liegen die Mittelpunkte seiner vier berührenden Kreise also, daß die Summe der Quadrate ihrer Abstände vom Mittelpunkte des Kreises, welcher durch die Fußpunkte der Perpendikel des Dreiecks geht, die Summe der Quadrate ihrer Abstände vom Mittelpunkt des umbeschriebenen Kreises um das vierfache Quadrat vom Abstande dieser beiden Mittelpunkte von einander selbst übertrifft.

§. 60.

Es wird nicht uninteressant seyn, hier zu bemerken, daß, wie schon Carnot (a. O.) gefunden hat, der Schwerpunkt des Dreiecks ABC ebenfalls in der Geraden KO liegt, und zwar, nachdem man dieselbe in drei gleiche Theile getheilt hat, im ersten Theilungspunkte von K an. Denn wenn man die Gerade Cc zieht, welche die KO in G schneide, so ist, weil CO mit Kc parallel geht, Gc : GC = Kc : OC. Nun ist aber (§. 45.) OC = 2 Kc also auch GC = 2 Gc, woher offenbar G der Schwerpunkt des Dreiecks ABC. — Man wird hieraus die Abstände dieses Punkts von den

bisher betrachteten ohne Schwierigkeit bestimmen können. Weil $GK = \frac{1}{3} KO$, $GO = \frac{2}{3} KO$, $GL = \frac{1}{6} KO$, so hat man sogleich (§. 53.):

$$\overline{GK}^2 = \frac{1}{9} (R^2 - 4\rho R)$$

$$\overline{GO}^2 = \frac{4}{9} (R^2 - 4\rho R)$$

$$\overline{GL}^2 = \frac{1}{36} (R^2 - 4\rho R).$$

Ferner ziehe man die Gerade GS, so ist $\overline{GS}^2 = \overline{KS}^2 + \frac{1}{9}\overline{KO}^2 - \frac{2}{3} KS.KO . \cos SKO$.
Nun ist aber $\cos . SKO = \frac{-\overline{OS}^2 + \overline{KS}^2 + \overline{KO}^2}{2 KS . KO}$, also $\overline{GS}^2 = \frac{1}{9} (6\overline{KS}^2 + 3\overline{OS}^2 - 2\overline{KO}^2)$ und, wenn man hierin die (§. 49. 51. 53.) gefundenen Werthe der Quadrate von HS, OS, KO substituirt, so ergiebt sich endlich:

$$\overline{GS}^2 = \frac{2}{9} R (2R + \rho) - \frac{2}{3} r (2R - r).$$

Um die Abstände des Punkts G von den Mittelpunkten S′, S″, S‴ zu erhalten, setze man nur in diesem Ausdruck nach und nach a, b, c negativ, so kommt ferner:

$$\overline{GS'}^2 = \frac{2}{9} R (2R - \rho) + \frac{2}{3} r' (2R + r')$$

$$\overline{GS''}^2 = \frac{2}{9} R (2R - \rho) + \frac{2}{3} r'' (2R + r'')$$

$$\overline{GS'''}^2 = \frac{2}{9} R (2R - \rho) + \frac{2}{3} r''' (2R + r''')$$

Addirt man diese Werthe der Quadrate von GS, GS′, GS″, GS‴, so erhält man:

$$\overline{GS}^2 + \overline{GS'}^2 + \overline{GS''}^2 + \overline{GS'''}^2 = \frac{28}{9} R (4R - \rho)$$

d. h. In jedem spitzwinkligen Dreieck ist die Summe der Quadrate der Abstände seines Schwerpunkts von den Mittelpunkten seiner vier berührenden Kreise, gleich vierzehn Neuntel des Rechtecks aus dem Durchmesser des umbeschriebenen Kreises in den Überschuß dieses doppelten Durchmessers über den Halbmesser desjenigen Kreises, welcher in das durch die Fußpunkte der Perpendikel bestimmte Dreieck beschrieben ist.

Da wir (§. 52.) $\overline{OS}^2 + \overline{OS'}^2 + \overline{OS''}^2 + \overline{OS'''}^2 = 4R(4R - \rho)$ gefunden haben,

und für ein z. B. bei A stumpfwinkliges Dreieck ABC der Ausdruck $4R - \rho$ in $4R + \overset{(1)}{\rho}$ übergeht, so erhält man allgemein noch folgende Relation:

$$9(\overline{GS}^2 + \overline{GS'}^2 + \overline{GS''}^2 + \overline{GS'''}^2) = 7(\overline{OS}^2 + \overline{OS'}^2 + \overline{OS''}^2 + \overline{OS'''}^2).$$

d. h. In jedem Dreieck haben die Mittelpunkte seiner vier berührenden Kreise eine solche Lage zu seinem Schwerpunkt und dem Durchschnittspunkt seiner Perpendikel, daß die Summe der Quadrate ihrer Abstände vom ersten Punkt sich zu der Summe der Quadrate ihrer Abstände vom zweiten Punkt verhält, wie 7 zu 9.

Fünfter Abschnitt.

Sätze, welche sich aus vergleichender Betrachtung und wechselseitiger Verbindung der bisher vorgetragenen ergeben.

§. 61.

Es seyen im Dreieck ABC, M, N, P die Fußpunkte der aus den Winkelpunten A, B, C auf die gegenüberliegenden Seiten gefällteu Senkrechten, deren Durchschnittspunkt O; ferner im Dreieck MNP, d, e, f die Berührungspunkte seines innerhalb berührenden Kreises, so wie d′, e′, f′ die Berührungspunkte seines ausserhalb berührenden in der Ebene des Winkels PMN befindlichen Kreises. Fig. 8.

Weil (§. 26.) der Halbmesser des um das Dreieck MNP beschriebenen Kreises gleich $\frac{1}{2}R$, so ist (§. 8.) $\triangle def : \triangle MNP = \rho : R$, und, da (§. 25.) $\triangle MNP : \triangle = \rho : R$, so folgt:

$$\triangle def : \triangle MNP = \triangle MNP : \triangle.$$

Wenn das Dreieck ABC stumpfwinklig, z. B. bei A, so ist (§. 24. 25.) $\triangle MNP : \triangle = \overset{(1)}{\rho} : R$, und, weil auch (§. 8.) $\triangle d'e'f' : \triangle MNP = \overset{(1)}{\rho} : R$, so ist für diesen Fall:

$$\triangle d'e'f' : \triangle MNP = \triangle MNP : \triangle,$$

woher man den Satz erhält:

Das Dreieck MNP ist das mittlere geometrische Proportional Dreieck zwi-

schen dem Dreieck ABC und jenem, welches die Berührungspunkte desjenigen die drei Seiten des Dreiecks MNP berührenden Kreises bilden, dessen Mittelpunkt jedesmal in den Durchschnittspunkt der Perpendikel des Dreiecks ABC fällt.

Da übrigens die Gerade ON sowohl senkrecht auf AC als df, so ist AC mit df parallel und eben so de, ef parallel mit AB, BC; woraus folgt, daß die Dreiecke ABC, def einander ähnlich also liegen, daß ihre den gleichen Winkeln gegenüberliegenden Seiten mit einander parallel gehn; welche nämliche Beschaffenheit auch den Dreiecken BCO, d′ e′ f′ zukommt, indem die Gerade AP sowohl senkrecht auf CP, als d′ e′, etc. etc.

Zugleich wird man nach ähnlicher Schlußfolge wie §. 40. durch den vorhin bewiesenen Satz auch die Richtigkeit des folgenden einsehen:

Jedes Dreieck ist selbst das mittlere geometrische Proportional-Dreieck zwischen dem Dreieck, welches die Berührungspunkte irgend eines seiner vier berührenden Kreise bilden, und demjenigen, welches die Mittelpunkte der drei übrigen bestimmen.

§. 62.

Es ist $de = 2\rho \cos \frac{1}{2} NPM$, und, weil der Winkel $NPM = 180 - 2\gamma$, so wird:

$de = 2\rho \sin\gamma$; eben so $df = 2\rho \sin\beta$, und $ef = 2\rho \sin\alpha$.

Addirt man diese drei Werthe, so kommt, weil:

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = \frac{\Delta}{rR},$$

und (§. 19.) $MN + MP + NP = \frac{2\Delta}{R}$:

$$de + df + ef : MN + MP + NP = \rho : r$$

d. h. wenn man sich an die §. 24. angegebene Beziehung der Winkelpunkte ABC zum Dreieck MNP erinnert:

Der Umfang des Dreiecks def, welches die Berührungspunkte des in das Dreieck MNP beschriebenen Kreises bilden, verhält sich zum Umfang des letzten Dreiecks, wie sich verhält der Halbmesser dieses Kreises zum Halbmesser des in das Dreieck ABC beschriebenen, welches die Mittelpunkte der ausserhalb berührenden Kreise des Dreiecks MNP bestimmen.

§. 63.

Es seyen im Dreieck ABC, D, E, F die Berührungspunkte des einbeschriebenen Kreises, und m, n, p die Fußpunkte der Senkrechten, welche im Dreieck DEF aus seinen Winkelpunkten D, E, F auf die gegenüberliegenden Seiten gefällt sind, und sich im Punkte J schneiden sollen. Fig. 9.

Weil nun der Winkel $FDE = 90 - \frac{1}{2}\alpha$, $DEF = 90 - \frac{1}{2}\beta$, $EFD = 90 - \frac{1}{2}\gamma$, so erhält man (§. 23.) $\triangle\, mnp = 2\triangle DEF \,.\, \sin\frac{1}{2}\alpha \sin\frac{1}{2}\beta \sin\frac{1}{2}\gamma$; allein $\sin\frac{1}{2}\alpha \sin\frac{1}{2}\beta \sin\frac{1}{2}\gamma = \frac{r}{4R}$ und (§. 8.) $\frac{\triangle DEF}{\triangle} = \frac{r}{2R}$, folglich:

$$\triangle\, mnp : \triangle DEF = DEF : \triangle$$

Bezeichnet man demnach gleichwie in §. 8. durch $\delta, \delta', \delta'', \delta'''$ die Inhalte derjenigen Dreiecke, welche durch die Berührungspunkte der Kreise von den Halbmessern r, r', r'', r''' bestimmt werden; ferner durch μ, μ', μ'', μ''' die Inhalte derjenigen Dreiecke, welche die Fußpunkte der Perpendikel in den Dreiecken $\delta, \delta', \delta'', \delta'''$ bilden; so ergeben sich, nachdem man in dem Werthe des Dreiecks mnp nach und nach a, b, c negativ gesetzt hat, folgende Proportionen:

$$\mu : \delta = \delta : \triangle,\quad \mu' : \delta' = \delta' : \triangle,\quad \mu'' : \delta'' = \delta'' : \triangle,\quad \mu''' : \delta''' = \delta''' : \triangle$$

d. h. In jedem Dreieck ist dasjenige Dreieck, welches die Berührunpspunkte irgend eines seiner vier berührenden Kreise bilden, zugleich das mittlere geometrische Proportionaldreieck zwischen jenem und demjenigen, welches die Fußpunkte der Perpendikel in diesem bestimmen.

Da übrigens die Seite AC den einbeschriebenen Kreis in E berührt, so ist der Winkel $AEF = FDE$, und weil $FDE = Emp$ so geht AC mit mp parallel, und eben so AB, BC parallel mit mn, np. — Ferner seyen (Fig. 10.) m', n', p' die Fußpunkte der Perpendikel $D'm'$, $E'n'$, $F'p'$ im Dreieck $D'E'F'$, welches die Berührungspunkte des Kreises vom Halbmesser r' bilden. Da also die verlängerte AC diesen ausserhalb berührenden Kreis in E' berührt, so ist Winkel $AE'F' = p'D'F'$, und weil $p'D'F' = p'm'F'$ so geht AC mit $m'p'$ parallel, und eben so AB parallel mit $m'n'$. Und weil der Winkel $m'n'D = m'E'D'$ und $F'E'D' =$ [illegible] $= \frac{1}{2}ABC$, so folgt, daß der Winkel $m'n'p' = ABC$ und also auch BC para[illegible] p' geht.

Aus dieser Betrachtung ergiebt sich dem[illegible] daß die D[illegible] μ, μ', μ'', [illegible]

μ''', ABC alle einander ähnlich also liegen, daß ihre den gleichen Winkeln gegenüberliegenden Seiten mit einander parallel gehn.

§. 64.

Aus den im vorigen §. gefundenen Proportionen ergiebt sich sogleich (§. 8.) $\mu + \mu' + \mu'' + \mu''' = \frac{\Delta}{4R^2}(r^2 + r'^2 + r''^2 + r'''^2)$. Nun ist aber (§. 28.) $r^2 + r'^2 + r''^2 + r'''^2 = 4R(2R - \rho)$ und (§. 25.) $\frac{\rho\Delta}{R} = \Delta MNP$, folglich:

$$\mu + \mu' + \mu'' + \mu''' + \Delta MNP = 2\Delta$$

d. h. Wenn man in einem spitzwinkligen Dreieck die Fußpunkte seiner Perpendikel durch Gerade verbindet, eben so auch die Fußpunkte der Perpendikel in denjenigen Dreiecken, welche die Berührungspunkte seiner vier berührenden Kreise bilden, so entstehen fünf Dreiecke, deren Inhalte zusammen genommen dem doppelten Inhalte des vorgegebenen Dreiecks gleich sind.

Ist das vorgegebene Dreieck stumpfwinklig, so wird das Dreieck MNP in dieser Summe negativ, so daß alsdann $\mu + \mu' + \mu'' + \mu''' - \Delta MNP = 2\Delta$.

§. 65.

Es ist (§. 19.) $mn = DE \sin\frac{1}{2}\gamma$, und weil $DE = 2r\cos\frac{1}{2}\gamma$, und $\sin\gamma = 2\sin\frac{1}{2}\gamma\cos\frac{1}{2}\gamma$, so wird:

$$mn = r\sin\gamma;\ \text{eben so}\ mp = r\sin\beta,\ \text{und}\ np = r\sin\alpha.$$

Addirt man diese Werthe, so kommt, da $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = \frac{r\Delta}{R}$ und (§. 19.) $MN + MP + NP = \frac{2\Delta}{R}$;

$$mn + mp + np = \frac{1}{2}(MN + MP + NP)$$

d. h. Der Umfang des Dreiecks, welches die Fußpunkte der Perpendikel im Dreieck DEF bilden, ist halb so groß, als der Umfang des Dreiecks, welches die Fußpunkte der Perpendikel im Dreieck ABC bilden.

Für ein z. B. bei A stumpfwinkliges Dreieck ABC wird die Seite NP im Umfange des Dreiecks MNP negativ, so daß alsdann $mn + mp + np = \frac{1}{2}(MN + MP - NP)$.

§. 66.

Bezeichnet man die Halbmesser derjenigen Kreise, welche die drei Seiten der Dreiecke μ, μ', μ'', μ''' berühren, und deren Mittelpunkte jedesmal in die Durchschnittspunkte der Perpendikel in den Dreiecken δ, δ', δ'', δ''' fallen, der Ordnung nach durch r, r', r'', r''', so hat man aus §. 25.:

$$\mu : \delta = r : r \quad \mu' : \delta' = r' : r' \quad \mu'' : \delta'' = r'' : r'' \quad \mu''' : \delta''' = r''' : r'''.$$

Aus §. 63. erhält man aber mit Hülfe von §. 8.:

$$\mu : \delta = r : 2R, \quad \mu' : \delta' = r' : 2R, \quad \mu'' : \delta'' = r'' : 2R, \quad \mu''' : \delta''' = r''' : 2R;$$

woher sich ergiebt:

$$r^2 = 2rR, \quad r'^2 = 2r'R, \quad r''^2 = 2r''R, \quad r'''^2 = 2r'''R.$$

d. h. Wenn man in dem Dreieck, welches die Berührungspunkte irgend eines berührenden Kreises des beliebigen Dreiecks ABC bilden, die Fußpunkte seiner Perpendikel durch Gerade verbindet; so ist derjenige berührende Kreis dieses so entstandenen Dreiecks, dessen Mittelpunkt im Durchschnittspunkt jener Perpendikel liegt, von der Beschaffenheit, daß das Rechteck aus seinem Durchmesser in den Halbmesser des um das Dreieck ABC beschriebenen Kreises, gleich ist dem Quadrate vom Halbmesser jenes berührenden Kreises dieses Dreiecks.

Da übrigens in jedem Falle das Dreieck δ spitzwinklig ist, jedes der Dreiecke δ', δ'', δ''' hingegen stumpfwinklig bleibt, was sehr leicht erhellet, wenn man die Winkel der Dreiecke δ, δ', δ'', δ''' aus den Winkeln des Dreiecks ABC bestimmt; so folgt offenbar, daß die Werthe jener Halbmesser $r = \frac{r^2}{2R}$, $r' = \frac{r'^2}{2R}$, $r'' = \frac{r''^2}{2R}$, $r''' = \frac{r'''^2}{2R}$ keiner Veränderung unterworfen sind, wenn das Dreieck ABC stumpfwinklig wird, und daß jedesmal der Kreis vom Halbmesser r ein innerhalb berührender, hingegen jeder Kreis von den Halbmessern r', r'', r''' ein ausserhalb berührender seyn wird. So ist z. B. r' (Fig. 10.) der Halbmesser desjenigen die drei Seiten des Dreiecks m' n' p' ausserhalb berührenden Kreises, welcher die dem Winkel $p' m' n' = \alpha$ gegenüberliegende Seite n' p' selbst berührt. Man vergleiche hierüber die Betrachtung des Halbmessers ρ in §. 24.

§. 67.

Multiplicirt man die Werthe dieser vier Halbmesser r, r', r'', r''' in einander, so kommt, weil (§. 2.) $r\,r'\,r''\,r''' = \Delta^2$ und (§. 20.) $\frac{\Delta}{R} = Q$:

$$16\,r\,r'\,r''\,r''' = Q^4$$

d. h. weil auch $Q = \frac{1}{2}(MN + MP + NP)$:

Die vier oben §. 66. beschriebenen Durchmesser $2r$, $2r'$, $2r''$, $2r'''$ sind von der Beschaffenheit, daß zwischen dem Rechteck aus je zweien derselben und dem Rechteck aus den beiden übrigen das Quadrat vom halben Umfang des Dreiecks MNP das mittlere geometrische Proportional-Quadrat ist.

§. 68.

Addirt man die Werthe der vier Halbmesser r, r', r'', r''' so kommt nach §. 28.:

$$r + r' + r'' + r''' = 2(2R - \rho)$$

d. h. Die Summe der vier §. 66. beschriebenen Halbmesser r, r', r'', r''' ist gleich dem doppelten Durchmesser des um das Dreieck ABC beschriebenen Kreises, weniger dem Durchmesser des in das Dreieck MNP beschriebenen.

§. 69.

Wenn d, e, f die Seiten des Dreiecks DEF bezeichnen, so hat man aus §. 10. $d^2 + e^2 + f^2 = \frac{2r^2(r' + r'' + r''')}{R}$ und also weil (§. 66.) $r = \frac{r^2}{2R}$:

$$d^2 + e^2 + f^2 = 4r(r' + r'' + r''')$$

d. h. Die Summe der Quadrate von den Seiten des Dreiecks DEF ist gleich dem Rechteck aus dem Durchmesser des in das Dreieck mnp beschriebenen Kreises in die Summe der Durchmesser von den drei ausserhalb berührenden Kreisen des Dreiecks ABC.

Weil übrigens $r' + r'' + r''' = r + 4R$ und $4r(r + 4R) = 4rr + 8r^2$, so kommt auch $d^2 + e^2 + f^2 = 4r(r + 2r)$, welches vollkommen mit dem §. 27. erwiesenen Satz übereinstimmt, indem r zugleich der Halbmesser des um das Dreieck DEF beschriebenen Kreises ist.

Für die Seiten der Dreiecke δ', δ'', δ''' erhält man aus §. 10. noch folgende Relationen:

$$d'^2 + e'^2 + f'^2 = 4r'(r''+r'''-r)$$
$$d''^2 + e''^2 + f''^2 = 4r''(r'+r'''-r)$$
$$d'''^2 + e'''^2 + f'''^2 = 4r'''(r'+r''-r)$$

d. h. In jedem Dreieck ist die Summe der Quadrate von den Seiten desjenigen Dreiecks, welches die Berührungspunkte irgend eines seiner ausserhalb berührenden Kreise bilden, gleich dem Rechteck aus dem Durchmesser des zugehörigen der Kreise von den Halbmessern r', r'', r''' (§. 66.) in die Summe der Durchmesser von den beiden andern ausserhalb berührenden Kreisen, weniger dem Durchmesser des innerhalb berührenden.

§. 70.

Multiplicirt man in §. 10. die Werthe der Seiten d, e, f in einander, so kommt $d\,e\,f = 8r^3 \cos\frac{1}{2}\alpha \cos\frac{1}{2}\beta \cos\frac{1}{2}\gamma$ und, drückt man diese Cosinus durch die Seiten des Dreiecks ABC aus, so entsteht, weil alsdann:

$$\cos\frac{1}{2}\alpha \cos\frac{1}{2}\beta \cos\frac{1}{2}\gamma = \frac{\Delta}{4rR},$$

und $r = \frac{r^2}{2R}$ (§. 66.):

$$d\,e\,f = 4r\Delta$$

d. h. Das senkrechte Parallelepiped aus den Seiten des Dreiecks DEF ist gleich dem senkrechten Prisma, dessen Grundfläche das Dreieck ABC und dessen Höhe der doppelte Durchmesser des in das Dreieck m n p beschriebenen Kreises.

Setzt man in diesem Ausdruck nach und nach a, b, c negativ, so erhält man für die Seiten der Dreiecke δ', δ'', δ''':

$$d'\,e'\,f' = 4r'\Delta, \quad d''\,e''\,f'' = 4r''\Delta, \quad d'''\,e'''\,f''' = 4r'''\Delta.$$

d. h. In jedem Dreieck ist das senkrechte Parallelepiped aus den Seiten desjenigen Dreiecks, welches die Berührungspunkte irgend eines seiner ausserhalb berührenden Kreise bilden, gleich dem senkrechten Prisma, dessen Höhe der doppelte Durchmesser des zugehörigen der Kreise von den Halbmessern r', r'', r''' (§. 66.) und dessen Grundfläche das vorgegebene Dreieck selbst ist.

§. 71.

Fig. 8. 9. Aus §. 38. folgt sogleich $OM + ON + OP = \rho + 2r + \frac{r^2}{R}$ und also, weil (§. 66.) $\mathfrak{r} = \frac{r^2}{2R}$:

$$OM + ON + OP = \rho + 2(r + \mathfrak{r})$$

d. h. Die Summe aus den drei Abständen des Durchschnittspunkts der Perpendikel im Dreieck ABC von den Seiten desselben, ist gleich dem Halbmesser des in das Dreieck MNP beschriebenen Kreises, sammt den Durchmessern der in die Dreiecke mnp und ABC beschriebenen Kreise.

Ist das Dreieck ABC stumpfwinklig z. B. bei A, so wird $OM - ON - OP = 2(r + \mathfrak{r}) - \overset{(1)}{\rho}$.

§. 72.

Fig. 11 Wenn wie bisher M, N, P die Fußpunkte der Perpendikel im Dreieck ABC vorstellen, und man beschreibt in die Dreiecke ANP, BMP, CMN Kreise, deren Halbmesser wir der Ordnung nach durch die Buchstaben ρ', ρ'', ρ''' bezeichnen wollen, so ist $\rho' = \frac{2\triangle ANP}{AN + AP + NP}$, folglich, weil (§. 23.) $\triangle ANP = \triangle \cos\alpha^2$ und (§. 19.) $AN + AP + NP = (a + b + c)\cos\alpha$:

$$\rho' = r\cos\alpha;\ \text{eben so}\ \rho'' = r\cos\beta,\ \text{und}\ \rho''' = r\cos\gamma.$$

Nimmt man diese Werthe zusammen, so kommt, weil (§. 32.) $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = \frac{r + R}{R}$ und (§. 66.) $r^2 = 2\mathfrak{r}R$:

$$\rho' + \rho'' + \rho''' = r + 2\mathfrak{r}$$

d. h. Die Summe der Halbmesser der in die Dreiecke ANP, BMP, CMN beschriebenen Kreise ist gleich dem Halbmesser des in das Dreieck ABC beschriebenen, sammt dem Durchmesser des in das Dreieck mnp (Fig. 9.) beschriebenen Kreises.

Wenn das Dreieck ABC stumpfwinklig z. B. bei A, so ist $\rho'' + \rho''' - \rho' = r + 2\mathfrak{r}$.

§. 73.

Substituirt man den Werth von $r + 2\mathfrak{r} = \rho' + \rho'' + \rho'''$ in der §. 71. gefunfundenen Relation, so ergiebt sich auch:

$$OM + ON + OP = r + \rho + \rho' + \rho'' + \rho'''$$

d. h. Die Summe aus den drei Abständen des Durchschnittspunkts der Perpendikel im Dreieck ABC von den Seiten desselben, ist gleich der Summe aus den Halbmessern der in die Dreiecke ABC, MNP, ANP, BMP, CMN beschriebenen Kreise.

Für ein bei A stumpfwinkliges Dreieck ABC ist OM - ON - OP $= r - \overset{(1)}{\rho} - \rho' + \rho'' + \rho'''$.

§. 74.

Erhebt man die Werthe der ρ', ρ'', ρ''' ins Quadrat, und addirt, so kommt, weil (§. 23. 24.) $\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = \frac{R - \rho}{R}$:

$$\rho'^2 + \rho''^2 + \rho'''^2 = 2r(R - \rho)$$

d. h. Die Summe der Quadrate von den Halbmessern der in die Dreiecke ANP, BMP, CMN beschriebenen Kreise, ist gleich dem Rechteck aus dem Durchmesser des in das Dreieck mnp (Fig. 9.) beschriebenen Kreises in den Unterschied der Halbmesser des um das Dreieck ABC und in das Dreieck MNP beschriebenen Kreises.

§. 75.

Weil $2(\rho'\rho'' + \rho'\rho''' + \rho''\rho''') = (\rho' + \rho'' + \rho''')^2 - \rho'^2 - \rho''^2 - \rho'''^2$, so ergiebt sich aus §. 72. 74.:

$$\rho'\rho'' + \rho'\rho''' + \rho''\rho''' = 2r^2 + r(\rho + 2r)$$

d. h. Die Summe der drei Rechtecke aus je zweien Halbmessern der in die Dreiecke ANP, BMP, CMN beschriebenen Kreise, ist gleich dem doppelten Quadrat vom Halbmesser des in das Dreieck mnp (Fig. 9.) beschriebenen Kreises, sammt dem Rechteck aus diesem Halbmesser in den Halbmesser des in das Dreieck MNP plus dem Durchmesser des in das Dreieck ABC beschriebenen Kreises.

§. 76.

Multiplicirt man die Werthe der ρ', ρ'', ρ''' in einander, so kommt, weil $\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma = \frac{\rho}{2R}$:

$$\rho'\rho''\rho''' = r\rho r$$

d. h. Das senkrechte Parallelepiped aus den Halbmessern der in die Dreiecke ANP, BMP, CMN beschriebenen Kreise, ist gleich dem senkrechten Parallelepiped aus den Halbmessern der in die Dreiecke mnp, (Fig. 9.), MNP, ABC beschriebenen Kreise.

§. 77.

Bezeichnet man den Inhalt des Dreiecks, welches die Halbmesser ρ', ρ'', ρ''' bestimmen, durch $\triangle'$ und den Inhalt des Dreiecks aus den Geraden AO, BO, CO durch $\triangle''$, ferner das Produkt $(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)(-\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)(\cos\alpha - \cos\beta + \cos\gamma)(\cos\alpha + \cos\beta - \cos\gamma)$ durch P; so ist $\triangle' = \frac{1}{4} r^2 \sqrt{P}$ und $\triangle'' = R^2 \sqrt{P}$, folglich weil $r^2 = 2rR$:

$$\triangle' : \triangle'' = r : 2R$$

d. h. Der Inhalt des Dreiecks aus den Halbmessern der in die Dreiecke ANP, BMP, CMN beschriebenen Kreise, verhält sich zum Inhalt des Dreiecks aus den Geraden AO, BO, CO, wie der Halbmesser des in das Dreieck mnp (Fig. 9.) beschriebenen Kreises zum Durchmesser des um das Dreieck ABC beschriebenen.

§. 78.

Wenn O′, O″, O‴ die Mittelpunkte der in die Dreiecke ANP, BMP, CMN beschriebenen Kreise sind, und man zieht die Geraden AO′, BO″, CO‴, so ist:

$$AO' = \frac{\rho'}{\sin\frac{1}{2}\alpha}, \quad BO'' = \frac{\rho''}{\sin\frac{1}{2}\beta}, \quad CO''' = \frac{\rho'''}{\sin\frac{1}{2}\gamma}$$

folglich $AO' . BO'' . CO''' = \frac{\rho' \rho'' \rho'''}{\sin\frac{1}{2}\alpha \sin\frac{1}{2}\beta \sin\frac{1}{2}\gamma}$. Nun ist aber (§. 76.) $\rho' \rho'' \rho''' = r \rho r$ und $\sin\frac{1}{2}\alpha \cdot \sin\frac{1}{2}\beta \; \sin\frac{1}{2}\gamma = \frac{r}{4R}$, folglich:

$$AO' . BO'' . CO''' = 4 r \rho R = 2 \rho r^2$$

d. h. Das senkrechte Parallelepiped aus den Abständen AO′, BO″, CO‴ ist gleich dem senkrechten Paralellepiped, dessen Grundfläche das Quadrat vom Halbmesser des in das Dreieck ABC beschriebenen Kreises ist, und dessen Höhe der Durchmesser des in das Dreieck MNP beschriebenen.

Man wird übrigens, gleichwie in §. 52. aus den übrigen sechs Abständen NO′, PO′, MO″, PO″, MO‴, NO‴ noch zwei Produkte von gleicher Grösse zusammensetzen können, was sich auch leicht aus der Aehnlichkeit der Dreiecke ANP, BMP, CMN ergiebt. Diese Bemerkung ist auch auf den folgenden §. anzuwenden.

§. 79.

Man bezeichne die Halbmesser der um die Dreiecke NPO′, MPO″, MNO‴ beschriebenen Kreise durch $\mathfrak{R}'$, $\mathfrak{R}''$, $\mathfrak{R}'''$, so ist $\mathfrak{R}' = \frac{NP.NO'.PO'}{4\triangle NPO'}$; allein $NP = a\cos\alpha$, $NO' = \frac{\rho'}{\sin\frac{1}{2}\beta}$, $PO' = \frac{\rho'}{\sin\frac{1}{2}\gamma}$, und $\triangle NPO' = \frac{1}{2}a\rho'\cos\alpha$, folglich:

$$\mathfrak{R}' = \frac{\rho'}{2\sin\frac{1}{2}\beta\sin\frac{1}{2}\gamma};\ \text{eben so}\ \mathfrak{R}'' = \frac{\rho''}{2\sin\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\gamma},\ \text{und}\ \mathfrak{R}''' = \frac{\rho'''}{2\sin\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\beta}.$$

Multiplicirt man diese drei Werthe in einander, so kommt, weil (§. 76.) $\rho'\rho''\rho''' = r\rho r$ und $\sin\frac{1}{2}\alpha\ \sin\frac{1}{2}\beta\ \sin\frac{1}{2}\gamma = \frac{r}{4R}$, und $r^2 = 2rR$ (§. 66.):

$$\mathfrak{R}'\ \mathfrak{R}''\ \mathfrak{R}''' = \rho r R$$

d. h. Das senkrechte Parallelepiped aus den Halbmessern der um die Dreiecke NPO′, MPO″, MNO‴ beschriebenen Kreise ist gleich dem senkrechten Parallelepiped aus den Halbmessern der Kreise, welche in das Dreieck MNP und in und um das Dreieck ABC beschrieben sind.

§. 80.

Man fälle aus jedem der Mittelpunkte O′, O″, O‴ auf diejenige Seite des Dreiecks ABC, welche der zugehörige Kreis nicht berührt, eine Senkrechte, und bezeichne diese drei Senkrechten der Ordnung nach durch p′, p″, p‴, so ist offenbar:

$$ap' + (b+c)\rho' = 2\triangle$$
$$bp'' + (b+c)\rho'' = 2\triangle$$
$$cp''' + (a+b)\rho''' = 2\triangle$$

Nun ist aber wenn man die Werthe der Halbmesser ϱ', ϱ'', ϱ''' (§. 72.) durch die Seiten des Dreiecks ABC darstellt:

$$\rho' = \frac{(-a^2+b^2+c^2)\triangle}{bc(a+b+c)},\ \rho'' = \frac{(a^2-b^2+c^2)\triangle}{ac(a+b+c)},\ \rho''' = \frac{(a^2+b^2-c^2)\triangle}{ab(a+b+c)}.$$

Substituirt man demnach diese Werthe in obigen Ausdrücken, so erhält man nach gehöriger Umformung:

$$p' = \frac{b(a^2-b^2+c^2)+c(a^2+b^2-c^2)+2abc}{abc(a+b+c)}\Delta,$$

und, wenn man hier wieder die Halbmesser ϱ', ϱ'', r einführt:

$$p' = \varrho'' + \varrho''' + r$$

Eben so $\quad p'' = \varrho' + \varrho''' + r$

und $\quad p''' = \varrho' + \varrho'' + r$

d. h. Jede der Senkrechten aus den Mittelpunkten O′, O″, O‴ auf diejenige Seite des Dreiecks ABC, welche der zugehörige Kreis nicht berührt, ist gleich der Summe aus dem Halbmesser des in das Dreieck ABC beschriebenen Kreises und den Halbmessern derjenigen Kreise, welche den beiden andern Mittelpunkten angehören.

§. 81.

Addirt man in jeder der so eben gefundenen Gleichungen auf beiden Seiten den fehlenden Halbmesser der ϱ', ϱ'', ϱ''' so erhält man sogleich nach §. 72.:

$$p' + \varrho' = p'' + \varrho'' = p''' + \varrho''' = r + \varrho' + \varrho'' + \varrho''' = 2(r + r)$$

d. h. Die §. 80. beschriebenen Senkrechten p′, p″, p‴ werden alle einander gleich, wenn man zu jeder den Halbmesser desjenigen Kreises hinzuthut, aus dessen Mittelpunkt sie gefällt wurde; und zwar gleich der Summe aus den Durchmessern der in die Dreiecke mnp (Fig. 9.) und ABC beschriebenen Kreise.

§. 82.

Fig. 9. Wenn man aus dem Durchschnittspunkt J der Perpendikel im Dreieck DEF Senkrechte auf die Seiten BC, AC, AB des Dreiecks ABC fällt, und diese drei Senkrechten der Ordnung durch π', π'', π''' bezeichnet, so ist $\pi' = DJ \sin JDC$; allein (§. 32.) $DJ = 2r\sin\frac{1}{2}\alpha$ und der Winkel $JDC = EDC + EDJ = 90 + \frac{1}{2}(\beta-\gamma)$, folglich $\pi' = 2r\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}(\beta-\gamma)$. Nun ist aber $\sin\frac{1}{2}\alpha = \cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma)$ und $2\cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma)\cos\frac{1}{2}(\beta-\gamma) = \cos\beta + \cos\gamma$, also erhält man $\pi' = r(\cos\beta + \cos\gamma)$ und nach §. 72.:

$$\pi' = \varrho'' + \varrho'''$$

Eben so
$$\pi'' = \varrho' + \varrho'''$$

Und
$$\pi''' = \varrho' + \varrho''$$

d. h. Der Abstand des Punkts J von irgend einer Seite des Dreiecks ABC ist gleich der Summe aus den Halbmessern derjenigen beiden Kreisen von den bisher betrachteten um O′, O″, O‴ (Fig. 11.), welche eben jene Seite berühren.

§. 83.

Addirt man in jeder der so eben gefundenen Gleichungen auf beiden Seiten den fehlenden Halbmesser der ρ', ρ'', ρ''' so erhält man sogleich nach §. 72.:

$$\pi' + \varrho' = \pi'' + \varrho'' = \pi''' + \varrho''' = \varrho' + \varrho'' + \varrho''' = r + 2r$$

d. h. Die Abstände des Punkts J von den Seiten des Dreiecks ABC werden alle einander gleich, wenn man zu jedem den Halbmesser desjenigen der Kreise um O′, O″, O‴ (Fig. 11.) hinzuthut, welcher die zugehörige Seite nicht berührt; und zwar gleich dem Halbmesser des in das Dreieck ABC beschriebenen Kreises, sammt dem Durchmesser des in das Dreieck mnp beschriebenen.

§. 84.

Substituirt man die in §. 82. gefundenen Gleichungen in denen des §. 80., so ergiebt sich sogleich:

$$p' - \pi' = p'' - \pi'' = p''' - \pi''' = r$$

d. h. Jede der (§. 80.) beschriebenen Senkrechten p′, p″, p‴ übertrifft diejenige der Senkrechten π', π'', π''' (§. 82.), welche auf die nämliche Seite des Dreiecks ABC gefällt ist, um den Halbmesser des in das Dreieck ABC beschriebenen Kreises.

§. 85.

Wenn man die Mittelpunkte O′, O″, O‴ der in die Dreiecke ANP, BMP, CMN beschriebenen Kreise durch gerade Linien verbindet, und aus O′, O″ auf AB die Senkrechten O′e, O″d fällt, so ist: Fig. 12.

$$\overline{O'O''}^2 = (Pe + Pd)^2 + (\rho'' - \rho')^2.$$

Nun ist aber:

$$Pe = \frac{1}{2}(-AN + AP + NP) = \frac{(a+b-c)(-a^2+b^2+c^2)}{4bc},$$

$$Pd = \frac{1}{2}(-BM + BP + MP) = \frac{(a+b-c)(a^2-b^2+c^2)}{4ac};$$

Ferner, wenn man die Werthe der Halbmesser ρ', ρ'' (§. 72.) durch die Seiten des Dreiecks ABC ausdrückt:

$$\rho'' - \rho' = \frac{\Delta}{abc(a+b+c)}\left[-a(-a^2+b^2+c^2)+b(a^2-b^2+c^2)\right].$$

Substituirt man nun im Ausdrucke für $\overline{O'O''}^2$, so kommt endlich $\overline{O'O''}^2 = \frac{4(a+b-c)\Delta^2}{ab(a+b+c)}$, und, wenn man $a+b-c = \frac{4ab\cos\frac{1}{2}\gamma^2}{a+b+c}$ setzt, $\overline{O'O''}^2 = 4r^2\cos\frac{1}{2}\gamma^2$ oder:

$$O'O'' = 2r\cos\frac{1}{2}\gamma.$$

Eben so findet man $\quad O'O''' = 2r\cos\frac{1}{2}\beta$

und $\quad O''O''' = 2r\cos\frac{1}{2}\alpha$

Welche Werthe der Geraden $O'O''$, $O'O'''$, $O''O'''$ die nämlichen sind, welche wir in §. 10. für die Seiten DE, DF, EF des Dreiecks DEF angegeben haben, und es ergiebt sich demnach der Satz:

Wenn man die Mittelpunkte der in die Dreiecke ANP, BMP, CMN beschriebenen Kreise durch gerade Linien verbindet, so entspringt das nämliche Dreieck, welches die Berührungspunkte des in das Dreieck ABC beschriebenen Kreises bilden.

§. 86.

Verlängert man die Senkrechte $O'e$ bis sie die Seite AC in E trifft, so ist $AE = \frac{Ae}{\cos\alpha}$, und, weil $Ae = \frac{1}{2}(-a+b+c)\cos\alpha$, $AE = \frac{1}{2}(-a+b+c)$; woraus man erkennt, daß E derjenige Punkt ist, in welchem der in das Dreieck ABC beschriebenen Kreis die Seite AC berührt. Eben so wird gezeigt, daß die Verlängerung der Senkrechten $O''d$ die Seite BC in ihrem Berührungspunkte D mit jenem einbeschriebenen Kreise trifft. Da nun $O''D$ mit $O'E$ parallel geht, und aus §. 85. bekannt ist, daß $DE = O'O''$, so folgt auch, daß DE parallel mit $O'O''$ geht.

Auf gleiche Weise wird bewiesen, daß, wenn F der dritte Berührungspunkt des in das Dreieck ABC beschriebenen Kreises, DF mit $O'O'''$ und EF mit $O''O'''$ parallel gehen; so daß also die kongruenten Dreiecke DEF und $O'O''O'''$ also liegen, daß ihre den gleichen Winkeln gegenüberliegenden Seiten mit einander parallel gehen.

Aus dem Beweise dieses Satzes ergiebt sich auch, daß die Mittelpunkte der in die Dreiecke ANP, BMP, CMN beschriebenen Kreise zugleich die Durchschnittspunkte der Perpendikel in den Dreiecken AEF, BDF, CDE sind:

§. 87.

Wenn S der Mittelpunkt des in das Dreieck ABC beschriebenen Kreises ist, und man zieht die Geraden SF, SO′, SO″, SO‴, so ist:

$$\overline{O'S}^2 = (SF - O'e)^2 + (AF - Ae)^2.$$

Allein (§. 72.) $SF - O'e = r(1 - \cos\alpha)$ und $AF - Ae = \frac{1}{2}(-a+b+c)(1-\cos\alpha)$.

Substituirt man nun, nachdem man $1 - \cos\alpha = \frac{(a-b+c)(a+b-c)}{2bc}$ gesetzt hat, so erhält man endlich: $\overline{O'S}^2 = \frac{(-a+b+c)(a-b+c)^2(a+b-c)^2}{4bc(a+b+c)} = 4r^2 \sin\frac{1}{2}\alpha^2$, folglich:

$$O'S = 2r\sin\frac{1}{2}\alpha.$$

Eben so kommt $\qquad O''S = 2r\sin\frac{1}{2}\beta$

und $\qquad O'''S = 2r\sin\frac{1}{2}\gamma.$

Nun ist aber (Fig. 9.), weil der Winkel $FDE = 90 - \frac{1}{2}\alpha$, $DEF = 90 - \frac{1}{2}\beta$, $EFD = 90 - \frac{1}{2}\gamma$, nach §. 32. auch $DJ = 2r\sin\frac{1}{2}\alpha$, $EJ = 2r\sin\frac{1}{2}\beta$, $FJ = 2r\sin\frac{1}{2}\gamma$, also $O'S = DJ$, $O''S = EJ$, $O'''S = FJ$; woraus erhellet, daß, wenn man das Dreieck DEF (Fig. 9.) also auf das Dreieck $O'O''O'''$ legt, daß beide einander decken, (§. 85.) der Punkt J des ersten in den Punkt S des zweiten fallen wird. Da nun J (§. 63.) der Durchschnittspunkt der Perpendikel im Dreieck DEF, so ist auch S der Durchschnittspunkt der Perpendikel im Dreieck $O'O''O'''$ und es ergiebt sich der Satz:

Der Mittelpunkt des in das Dreieck ABC beschriebenen Kreises ist zugleich der Durchschnittspunkt der Perpendikel im Dreieck $O'O''O'''$.

Nun ist aber:

$$Pe = \frac{1}{2}(-AN + AP + NP) = \frac{(a+b-c)(-a^2+b^2+c^2)}{4bc},$$

$$Pd = \frac{1}{2}(-BM + BP + MP) = \frac{(a+b-c)(a^2-b^2+c^2)}{4ac};$$

Ferner, wenn man die Werthe der Halbmesser ρ', ρ'' (§. 72.) durch die Seiten des Dreiecks ABC ausdrückt:

$$\rho'' - \rho' = \frac{\Delta}{abc(a+b+c)}\left[-a(-a^2+b^2+c^2)+b(a^2-b^2+c^2)\right].$$

Substituirt man nun im Ausdrucke für $\overline{O'O''}^2$, so kommt endlich $\overline{O'O''}^2 = \frac{4(a+b-c)\Delta^2}{ab(a+b+c)}$, und, wenn man $a+b-c = \frac{4ab\cos\frac{1}{2}\gamma^2}{a+b+c}$ setzt, $\overline{O'O''}^2 = 4r^2\cos\frac{1}{2}\gamma^2$ oder:

$$O'O'' = 2r\cos\frac{1}{2}\gamma.$$

Eben so findet man $O'O''' = 2r\cos\frac{1}{2}\beta$

und $O''O''' = 2r\cos\frac{1}{2}\alpha$

Welche Werthe der Geraden $O'O''$, $O'O'''$, $O''O'''$ die nämlichen sind, welche wir in §. 10. für die Seiten DE, DF, EF des Dreiecks DEF angegeben haben, und es ergiebt sich demnach der Satz:

Wenn man die Mittelpunkte der in die Dreiecke ANP, BMP, CMN beschriebenen Kreise durch gerade Linien verbindet, so entspringt das nämliche Dreieck, welches die Berührungspunkte des in das Dreieck ABC beschriebenen Kreises bilden.

§. 86.

Verlängert man die Senkrechte $O'e$ bis sie die Seite AC in E trifft, so ist $AE = \frac{Ae}{\cos\alpha}$, und, weil $Ae = \frac{1}{2}(-a+b+c)\cos\alpha$, $AE = \frac{1}{2}(-a+b+c)$; woraus man erkennt, daß E derjenige Punkt ist, in welchem der in das Dreieck ABC beschriebenen Kreis die Seite AC berührt. Eben so wird gezeigt, daß die Verlängerung der Senkrechten $O''d$ die Seite BC in ihrem Berührungspunkte D mit jenem einbeschriebenen Kreise trifft. Da nun $O''D$ mit $O'E$ parallel geht, und aus §. 85. bekannt ist, daß $DE = O'O''$, so folgt auch, daß DE parallel mit $O'O''$ geht.

Auf gleiche Weise wird bewiesen, daß, wenn F der dritte Berührungspunkt des in das Dreieck ABC beschriebenen Kreises, DF mit $O'O'''$ und EF mit $O''O'''$ parallel gehen; so daß also die kongruenten Dreiecke DEF und $O'O''O'''$ also liegen, daß ihre den gleichen Winkeln gegenüberliegenden Seiten mit einander parallel gehen.

Aus dem Beweise dieses Satzes ergiebt sich auch, daß die Mittelpunkte der in die Dreiecke ANP, BMP, CMN beschriebenen Kreise zugleich die Durchschnittspunkte der Perpendikel in den Dreiecken AEF, BDF, CDE sind:

§. 87.

Wenn S der Mittelpunkt des in das Dreieck ABC beschriebenen Kreises ist, und man zieht die Geraden SF, SO′, SO″, SO‴, so ist:

$$\overline{O'S}^2 = (SF - O'e)^2 + (AF - Ae)^2.$$

Allein (§. 72.) $SF - O'e = r(1 - \cos\alpha)$ und $AF - Ae = \frac{1}{2}(-a+b+c)(1-\cos\alpha)$.

Substituirt man nun, nachdem man $1 - \cos\alpha = \frac{(a-b+c)(a+b-c)}{2bc}$ gesetzt hat, so erhält man endlich: $\overline{O'S}^2 = \frac{(-a+b+c)(a-b+c)^2(a+b-c)^2}{4bc(a+b+c)} = 4r^2 \sin\frac{1}{2}\alpha^2$, folglich:

$$O'S = 2r\sin\frac{1}{2}\alpha.$$

Eben so kommt $$O''S = 2r\sin\frac{1}{2}\beta$$

und $$O'''S = 2r\sin\frac{1}{2}\gamma.$$

Nun ist aber (Fig. 9.), weil der Winkel $FDE = 90 - \frac{1}{2}\alpha$, $DEF = 90 - \frac{1}{2}\beta$, $EFD = 90 - \frac{1}{2}\gamma$, nach §. 32. auch $DJ = 2r\sin\frac{1}{2}\alpha$, $EJ = 2r\sin\frac{1}{2}\beta$, $FJ = 2r\sin\frac{1}{2}\gamma$, also $O'S = DJ$, $O''S = EJ$, $O'''S = FJ$; woraus erhellet, daß, wenn man das Dreieck DEF (Fig. 9.) also auf das Dreieck $O'O''O'''$ legt, daß beide einander decken, (§. 85.) der Punkt J des ersten in den Punkt S des zweiten fallen wird. Da nun J (§. 63.) der Durchschnittspunkt der Perpendikel im Dreieck DEF, so ist auch S der Durchschnittspunkt der Perpendikel im Dreieck $O'O''O'''$ und es ergiebt sich der Satz:

Der Mittelpunkt des in das Dreieck ABC beschriebenen Kreises ist zugleich der Durchschnittspunkt der Perpendikel im Dreieck $O'O''O'''$.

§. 88.

Fig. 13. Wenn J wie bisher der Durchschnittspunkt der Perpendikel Dm, En, Fp im Dreieck DEF ist, und O′, O″, O‴ wieder die Mittelpunkte der in die Dreiecke ANP, BMP, CMN (Fig. 11.) beschriebenen Kreise vorstellen, und man zieht die Gerade O′J, so wie aus O′, J auf AB die Senkrechten O′e, Jg, so ist:

$$\overline{O'J}^2 = (Jg - O'e)^2 + (Fe - Fg)^2.$$

Nun ist aber (§. 82.) $Jg = \rho' + \rho''$ und $O'e = \rho'$, folglich:

$$Jg - O'e = \rho'' = r\cos\beta,$$

und, weil die Verlängerung von O′e die AC in E trifft (§. 86.), so ist $Fe = EF\cos AFE = r\sin\alpha$. Ferner ist $\overline{Fg}^2 = \overline{FJ}^2 - \overline{Jg}^2 = r^2\,(4\sin\frac{1}{2}\gamma^2 - (\cos\alpha + \cos\beta)^2)$, allein:

$$4\sin\frac{1}{2}\gamma^2 - (\cos\alpha + \cos\beta)^2 = (\sin\alpha - \sin\beta)^2,$$

mithin $Fg = r(\sin\alpha - \sin\beta)$ und:

$$Fe - Fg = r\sin\beta.$$

Substituirt man nun im Ausdruck für $\overline{O'J}^2$, so kommt $\overline{O'J}^2 = r^2(\sin\beta^2 + \cos\beta^2) = r^2$ also $O'J = r$, welchen nämlichen Werth man eben so für die Geraden O″J und O‴J finden wird, so daß also J der Mittelpunkt des um das Dreieck O′ O″ O‴ beschriebenen Kreises ist. Man erhält demnach den Satz:

Der Durchschnittspunkt der Perpendikel im Dreieck DEF ist zugleich der Mittelpunkt des um das Dreieck O′ O″ O‴ beschriebenen Kreises.

§. 89.

Weil J der Durchschnittspunkt der Perpendikel im Dreieck DEF ist und S zugleich der Mittelpunkt des um dieses Dreieck beschriebenen Kreises, so liegt (§. 55.) der Mittelpunkt des um das Dreieck mnp beschriebenen Kreises in der Mitte der Geraden SJ. Da nun aber nach §. 88. der Punkt J auch der Mittelpunkt des um das Dreieck O′O″ O‴ beschriebenen Kreises ist, und nach §. 87. der Punkt S zugleich der Durchschnittspunkt der Perpendikel in diesem Dreieck, so liegt der Mittelpunkt des Kreises durch die Fußpunkte der Perpendikel des Dreiecks O′ O″ O‴ ebenfalls in der Mitte der Geraden SJ (§. 55.); und so erhellet der Satz:

Der Mittelpunkt des Kreises, welcher durch die Fußpunkte der Perpendikel

im Dreieck DEF geht, ist zugleich der Mittelpunkt des Kreises, welcher durch die Fußpunkte der Perpendikel im Dreieck O′ O″ O‴ geht.

Man kann sich demnach vorstellen, das Dreieck O′ O″ O‴ sei entstanden, indem sich das Dreieck DEF in der Ebene des Dreiecks ABC um den Mittelpunkt des um das Dreieck mnp beschriebenen Kreises herumbewegt hat, bis es in die Lage gekommen, in welcher jede seiner Seiten mit ihrer ursprünglichen Richtung parallel geht.

§. 90.

Wenn M′, N′, P′ wie in §. 41. die Durchschnittspunkte der Perpendikel in den Dreiecken ANP, BMP, CMN sind, so ergiebt sich durch einfache geometrische Betrachtung der Satz: Fig. 5.

Wenn man diese Durchschnittspunkte M′, N′, P′ durch gerade Linien verbindet, so entspringt das nämliche Dreieck, welches die Fußpunkte M, N, P der Perpendikel im Dreieck ABC bestimmen, und zwar in solcher Lage, daß die den gleichen Winkeln gegenüberliegenden Seiten dieser beiden Dreiecke mit einander parallel gehen.

Denn man verbinde die Winkelpunkte der Dreiecke M′ N′ P′, MNP durch gerade Linien, so sind die Verlängerungen der M′ N, M′ P senkrecht auf den Seiten AB, AC, und weil auch OP, ON senkrecht auf AB, AC sind, so folgt M′ N = OP. Aus ähnlichem Grunde ist MN′ = OP, folglich M′ N = MN′, und weil diese Linien mit einander parallel gehen, so ist MN = M′ N′ und auch MN parallel mit M′ N′; was eben so von den Seiten MP, M′ P′ und NP, N′ P′ bewiesen wird.

Da überhaupt auch mehrere der bisher auf analytischem Wege gefundenen Sätze einfache geometrische Beweise zulassen, so wird es nicht uninteressant seyn, einige derselben hier aufzuführen.

Sechster Abschnitt.

Anhang von geometrischen Beweisen einiger bisher gefundenen Sätze.

1. Satz.

Fig. 14. Wenn man in einem Dreieck ABC aus dem Durchschnittspunkt O seiner Perpendikel an irgend einen Winkelpunkt A die gerade Linie AO zieht, und fällt auf die ihm gegenüberliegende Seite BC aus dem Mittelpunkt K des umbeschriebenen Kreises eine Senkrechte KE; so ist jene das doppelte von dieser.

Man errichte aus K auch auf AB die Senkrechte KD und ziehe aus O an den gegenüberliegenden Winkelpunkt C die OC. Ferner verbinde man die Punkte D, E durch eine gerade Linie. Da K der Mittelpunkt des umbeschriebenen Kreises, so sind (Eucl. III. 3.) BC, AB in E und D halbiert, also ist (VI. 2.) DE mit AC parallel und (VI. 4.) $AC = 2\,DE$. Weil nun aber KE und AO beide auf BC senkrecht sind, so gehen diese mit einander parallel, und weil $O\hat{A}B < C\hat{A}B$ also auch $< E\hat{D}B$, so wird die Verlängerung von DE die verlängerte AO in irgend einem Punkt F schneiden, und so ist (I. 29.) $C\hat{A}O = \hat{F} = D\hat{E}K$. Eben so wird gezeigt, daß auch $A\hat{C}O = K\hat{D}E$; folglich sind die beiden Dreiecke CAO, KDE gleichwinklig, und also (VI. 4.) $AC : AO = DE : KE$. Da nun $AC = 2\,DE$ so ist auch $AO = 2\,KE$.

2. Satz.

Fig. 15. Wenn man aus dem Durchschnittspunkt O der Perpendikel eines Dreiecks ABC an irgend einen Winkelpunkt C die gerade Linie CO zieht; so ist das Quadrat dieser Linie, sammt dem Quadrate von der, diesem Winkelpunkte gegenüberliegenden, Seite AB, gleich dem Quadrat vom Durchmesser des umbeschriebenen Kreises.

Man errichte aus dem Mittelpunkt K des umbeschriebenen Kreises auf AB die Senkrechte KD. Ferner ziehe man den Halbmesser AK, welcher verlängert die Peripherie des umbeschriebenen Kreises in G treffe, und ziehe BG, so ist (III. 31.) $A\hat{B}G = R$, also (I. 47.) $\overline{AB}^2 + \overline{BG}^2 = \overline{AG}^2$ Da nun BG und KD beide auf AB senkrecht

sind, so sind die Dreiecke ADK, ABG gleichwinklig, also (VI. 4.) AD : DK = AB : BG, und weil (III. 3.) AB = 2 AD, so ist auch BG = 2 KD. Nach dem 1ten Satz ist aber auch CO = 2 KD, also BG = CO und $\overline{AB}^2 + \overline{CO}^2 = \overline{AG}^2$.

3. Satz.

Wenn man die Fußpunkte M, N, P der Perpendikel eines spitzwinkligen Dreiecks ABC durch gerade Linien verbindet; so ist das Rechteck aus der Summe dieser drei Linien in den Halbmesser des um das Dreieck ABC beschriebenen Kreises, gleich dem doppelten Inhalte dieses Dreiecks.

Es sei K der Mittelpunkt des um das Dreieck ABC beschriebenen Kreises. Man ziehe die Halbmesser AK, BK, CK und auf AB die Senkrechte KD. Ferner sei O der Durchschnittspunkt der Perpendikel. Da (III. 22.) um das Viereck CNOM ein Kreis beschrieben werden kann, so ist (III. 21.) $N\hat{C}O = N\hat{M}O$, und also sind die Dreiecke ACO, AMN gleichwinklig, folglich (VI. 4.) CO : MN = AC : AM.

Verlängert man nun den Halbmesser AK, bis er den Kreis in G trifft, und zieht BG, so ist (III. 31.) $A\hat{B}G = R$ und (III. 21.) $A\hat{G}B = A\hat{C}B$. Folglich sind die Dreiecke ACM, ABG gleichwinklig, also (VI. 4.) AC : AM = AG : AB. Daher ist auch CO : MN = AG : AB und, weil AG = 2 AK und nach dem 1ten Satz CO = 2 KD, so folgt auch KD : MN = AK : AB. Also ist (VI. 16.) Rectg. KD . AB d. i. 2△ ABK = Rectg. AK . MN. Eben so wird bewiesen, daß 2△ ACK = Rectg CK . MP und 2△ BCK = Rectg BK . NP. Daher ist zusammen genommen 2△ ABC = Rectg AK (MN + MP + NP).

4. Satz.

Der Umfang des Dreiecks MNP, welches die Fußpunkte der Perpendikel im spitzwinkligen Dreieck ABC bilden, verhält sich zum Umfang des Dreiecks ABC, wie der Halbmesser des in dasselbe zum Halbmesser des um dasselbe beschriebenen Kreises.

Denn wenn der Halbmesser des in das Dreieck ABC beschriebenen Kreises r und der Halbmesser des umbeschriebenen R, so ist bekanntlich 2△ ABC = r (AB + AC + BC) und folglich nach dem vorigen Satz r (AB + AC + BC) = R (MN + MP + NP); also (VI. 16.) MN + MP + NP : AB + AC + BC = r : R.

5. Satz.

Der Inhalt des Dreiecks MNP, welches die Fußpunkte der Perpendikel im spitzwinkligen Dreieck ABC bilden, verhält sich zum Inhalt des Dreiecks ABC, wie der Halbmesser des in jenes zum Halbmesser des um dieses beschriebenen Kreises.

Denn wenn der Halbmesser des in das Dreieck MNP beschriebenen Kreises ρ ist, und r, R wie vorhin die Halbmesser der in und um das Dreieck ABC beschriebenen Kreise, so ist bekanntlich $2 \triangle MNP = \rho(MN + MP + NP)$ und $2 \triangle ABC = r(AB + AC + BC)$, also $\triangle MNP : \triangle ABC = \rho(MN + MP + NP) : r(AB + AC + BC)$. Nun folgt aber aus dem vorigen Satz (VI. 16.) $r(AB + AC + BC) = R(MN + MP + NP)$ und also ist $\triangle MNP : \triangle ABC = \rho : R$.

6. Satz.

Der Durchschnittspunkt O der Perpendikel im spitzwinkligen Dreieck ABC theilt jeden derselben CP in zwei solche Abschnitte CO, OP, daß das Rechteck aus diesen gleich ist dem Rechteck aus dem Durchmesser des um das Dreieck ABC beschriebenen Kreises in den Halbmesser des in das Dreieck MNP beschriebenen, welches die Fußpunkte jener Perpendikel bilden.

Man errichte aus O auf die Seite MP die Senkrechte OJ. Da (III. 22.) um das Viereck ANOP ein Kreis beschrieben werden kann, so ist (III. 21.) $N\hat{P}O = N\hat{A}O$ und aus demselben Grund $M\hat{P}O = M\hat{B}O$. Weil aber (I. 15.) $A\hat{O}N = B\hat{O}M$ und $A\hat{N}B = R = A\hat{M}B$, so ist $N\hat{A}O = M\hat{B}O$, folglich auch $N\hat{P}O = M\hat{P}O$. Eben so wird bewiesen, daß $N\hat{M}O = P\hat{M}O$; also ist (IV. 4.) O der Mittelpunkt des in das Dreieck MNP beschriebenen Kreises und die Senkrechte OJ ein Halbmesser dieses Kreises. Man lege nun durch den Winkelpunkt A und den Mittelpunkt K des um das Dreieck ABC beschriebenen Kreises einen Durchmesser AG desselben und ziehe BG, so ist (III. 31) $A\hat{B}G = R$ und (III. 21.) $A\hat{G}B = A\hat{C}B$; folglich $G\hat{A}B = C\hat{B}N$. Da nun $M\hat{B}O = M\hat{P}O$, so ist auch $G\hat{A}B = M\hat{P}O$, und daher sind die Dreiecke ABG, OPJ gleichwinklig, also (VI. 4.) $AG : BG = OP : OJ$. Man errichte ferner aus K auf AB die Senkrechte KD, so sind die Dreiecke ADK, ABG gleichwinklig, also (VI. 4.) $AD : DK = AB : BG$ und, weil (III. 3.) $AB = 2\,AD$, so ist auch $BG = 2\,KD$. Nach dem 1ten Satz aber ist $CO = 2\,KD$, folglich $BG = CO$; und also ist $AG : CO = OP : OJ$ und (VI. 16.) Rectg $AG . OJ$ = Rectg $CO . OP$.

7. Satz.

Die Summe der Quadrate von den Seiten eines spitzwinkligen Dreiecks ABC ist gleich dem doppelten Quadrat vom Durchmesser des umbeschriebenen Kreises, sammt dem Rechteck aus diesem Durchmesser in den Durchmesser des in das Dreieck MNP beschriebenen, welches die Fußpunkte der Perpendikel im Dreieck ABC bilden.

Es sei O der Durchschnittspunkt der Perpendikel. Man ziehe aus irgend einem Winkelpunkt C des Dreiecks ABC an die Mitte D der gegenüberliegenden Seite AB die Gerade CD. Da AB in D halbiert ist, so ist (II. 5.) $AP \cdot BP + \overline{PD}^2 = \frac{1}{4}\overline{AB}^2$. Weil aber $A\hat{B}N = A\hat{C}P$, so sind die Dreiecke APC, BPO gleichwinklig, also (VI. 4) $AP : CP = OP : BP$ und (VI. 16.) $AP \cdot BP = CP \cdot OP$. Da nun $CP = CO + OP$ so ist auch (II. 3) $AP \cdot BP = CO \cdot OP + \overline{OP}^2$. Also ist $CO \cdot OP + \overline{OP}^2 + \overline{PD}^2 = \frac{1}{4}\overline{AB}^2$. Nun ist (I. 47 und II. 4.) $\overline{CD}^2 = \overline{CO}^2 + 2\,CO \cdot OP + \overline{OP}^2 + \overline{PD}^2$, also $\overline{CD}^2 = \frac{1}{4}\overline{AB}^2 + \overline{CO}^2 + CO \cdot OP$. Ferner ist nach einem bekannten Folgesatz aus II. 12. $\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = \frac{1}{2}\overline{AB}^2 + 2\overline{CD}^2$, folglich auch $\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + 2\overline{CO}^2 + 2\,CO \cdot OP$, und wenn man auf beiden Seiten $\overline{AB}^2$ hinzuthut, $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = 2\,\overline{AB}^2 + 2\,\overline{CO}^2 + 2\,CO \cdot OP$. Bezeichnet man nun die Halbmesser des um das Dreieck ABC und in das Dreieck MNP beschriebenen Kreises durch R, ρ, so ist nach dem 2ten Satz $\overline{AB}^2 + \overline{CO}^2 = 4\,R^2$ und nach dem 6ten Satz $CO \cdot OP = 2\rho R$. Also ist $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = 8\,R^2 + 4\rho R$.

8. Satz.

Wenn man aus irgend einem Fußpunkte P der Perpendikel im spitzwinkligen Dreieck ABC in der Seite AB auf die beiden andern Seiten AC, BC die Senkrechten PG, PH fällt; so ist die gerade Linie GH, welche die Fußpunkte dieser Senkrechten verbindet, gleich dem halben Umfang des Dreiecks MNP, welches die Fußpunkte jener Perpendikel des Dreiecks ABC bilden. Fig. 16.

Man verlängere die PG, PH, bis sie die Verlängerung von MN in J und K schneiden. Da (III. 22.) um das Viereck CNOM ein Kreis beschrieben werden kann, so ist (III. 21) $C\hat{M}N = C\hat{O}N$; eben so ist $B\hat{M}P = B\hat{O}P$; folglich (I. 15.) $C\hat{M}N = B\hat{M}P$ und also auch $B\hat{M}K = B\hat{M}P$. Nun ist aber PH senkrecht auf BC, also (I. 26.) $MP = MK$ und $PH = HK$. Eben so wird bewiesen, daß $NP = NJ$ und $PG = GJ$.

Da also G, H die Mitten von PJ, PK sind, so geht (VI. 2.) GH mit JK parallel, also ist (VI. 4.) $PG : GH = PJ : JK$. Nun ist aber $PJ = 2 PG$, also auch $JK = 2 GH$ und folglich weil $JK = MN + MP + NP$, so ist $GH = \frac{1}{2}(MN + MP + NP)$.

9. Satz.

Der Halbmesser des um das Dreieck MNP beschriebenen Kreises, welches die Fig. 17. Fusspunkte der Perpendikel im Dreieck ABC bilden, ist halb so groß als der Halbmesser des um das Dreieck ABC beschriebenen Kreises; und der Ort L des Mittelpunkts jenes Kreises halbiert die Entfernung des Mittelpunkts K dieses Kreises vom Durchschnittspunkte O jener Perpendikel.

Man ziehe aus K an O, C die geraden Linien OK, CK und auf AB die Senkrechte KD. Ferner lege man durch D und die Mitte L der Geraden OK die DL, welche verlängert den Perpendikel CP in J schneide. Weil $LO = LK$, ferner (I. 15.) $O\hat{L}J = K\hat{L}D$ und, da OJ mit KD parallel geht, (I. 29.) $L\hat{O}J = L\hat{K}D$ ist, so folgt (I. 26.) $OJ = KD$ und $JL = DL$. Weil nun nach dem 1ten Satz $KD = \frac{1}{2} CO$, so ist auch $OJ = \frac{1}{2} CO$ und also $CJ = KD$ und, weil CJ mit KD parallel geht, so ist (I. 33.) $JD = CK$ folglich $DL = \frac{1}{2} CK$. Man ziehe ferner aus L auf AB die Senkrechte LE und an P die Gerade LP, so ist, weil die Geraden OP, LE, KD alle mit einander parallel gehen (VI. 2.) $OL : KL = PE : DE$, und, da $OL = KL$, so ist auch $PE = DE$; mithin (I. 4.) $LD = LP$. Da nun $LD = \frac{1}{2} CK$ so ist auch $LP = \frac{1}{2} CK$. Eben so wird bewiesen, daß $LN = \frac{1}{2} BK$ und $LM = \frac{1}{2} AK$; folglich weil $AK = BK = CK$, so ist auch $LM = LN = LP$ und L, das ist die Mitte von OK, ist der Mittelpunkt des um das Dreieck MNP beschriebenen Kreises.

Berichtigungen.

S. 1 Z. 11 v. U. statt: des lies: der

S. 5 Z. 11 v. O. lies das Komma vor des nach Kreises

S. 8 Z. 9 v. U. st. hierinn l. hierin

S. 16 Z. 4 v. O. lies nicht: Inhalt

S. 16 Z. 11 v. O. st. auf l. auf

S. 40 Z. 7 v. O. st. cos . SKO l. cos SKO

S. 40 Z. 7 v. U. st. Quadrate l. Quadrate

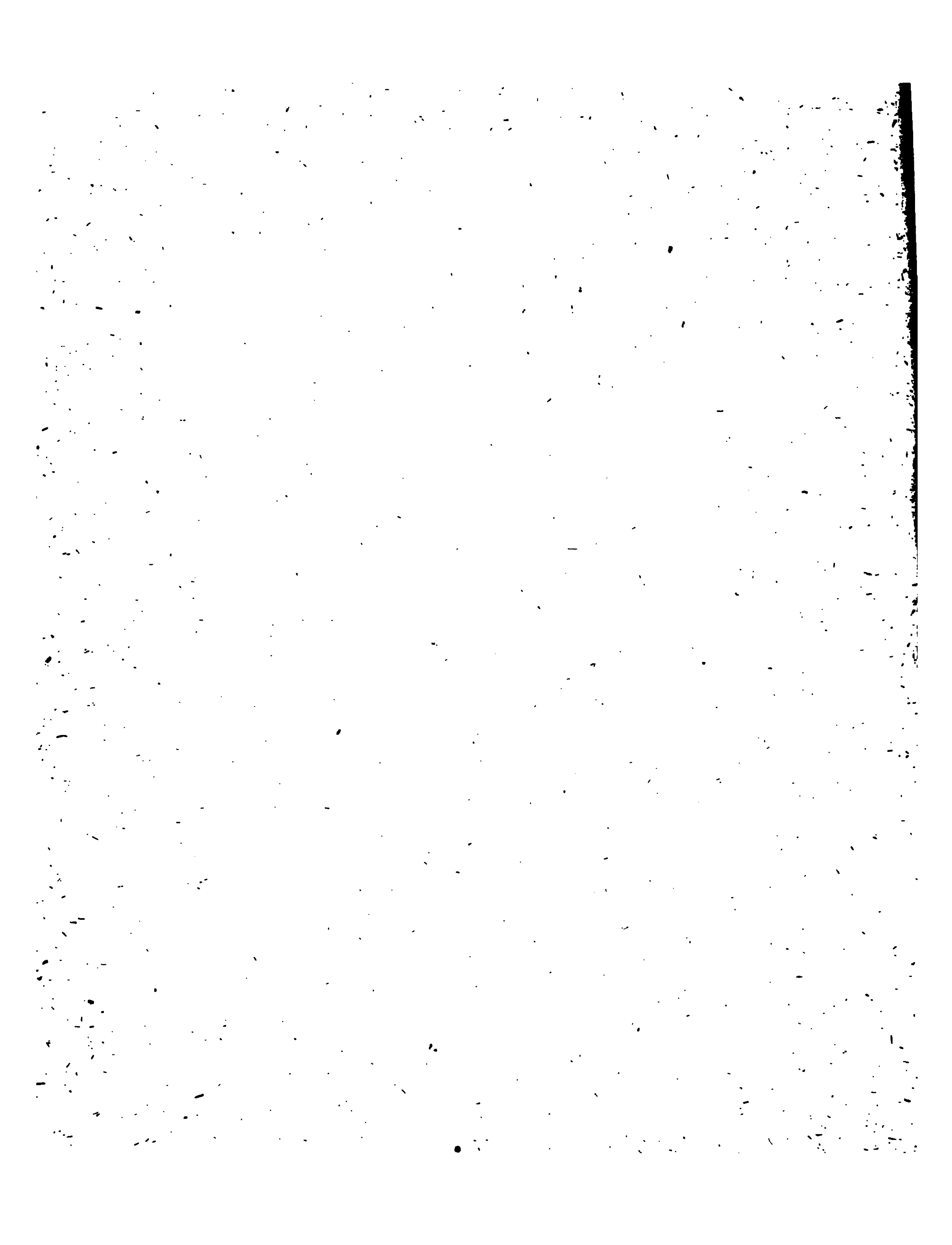
S. 43 Z. 9 v. O. st. DEF l. △ DEF

S. 43 Z. 5 v. U. nach ist lies: der

S. 45 Z. 6 v. O. nach jedem der Buchstaben r, r′, r″ lies ein Komma

S. 51 Z. 5 v. U. st. (b + c) l. (a + c)

S. 52 Z. 5 v. U. vor durch lies: nach



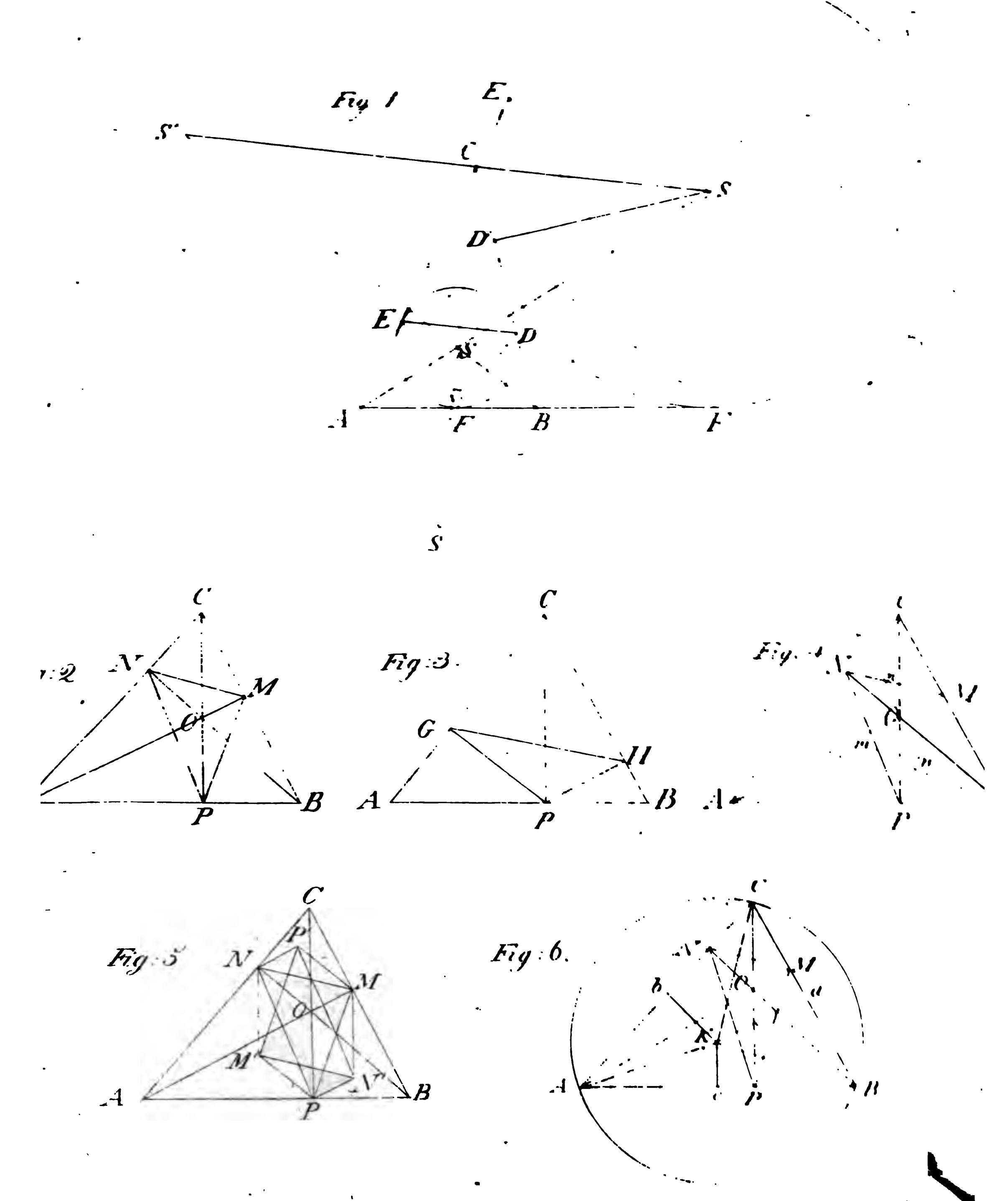
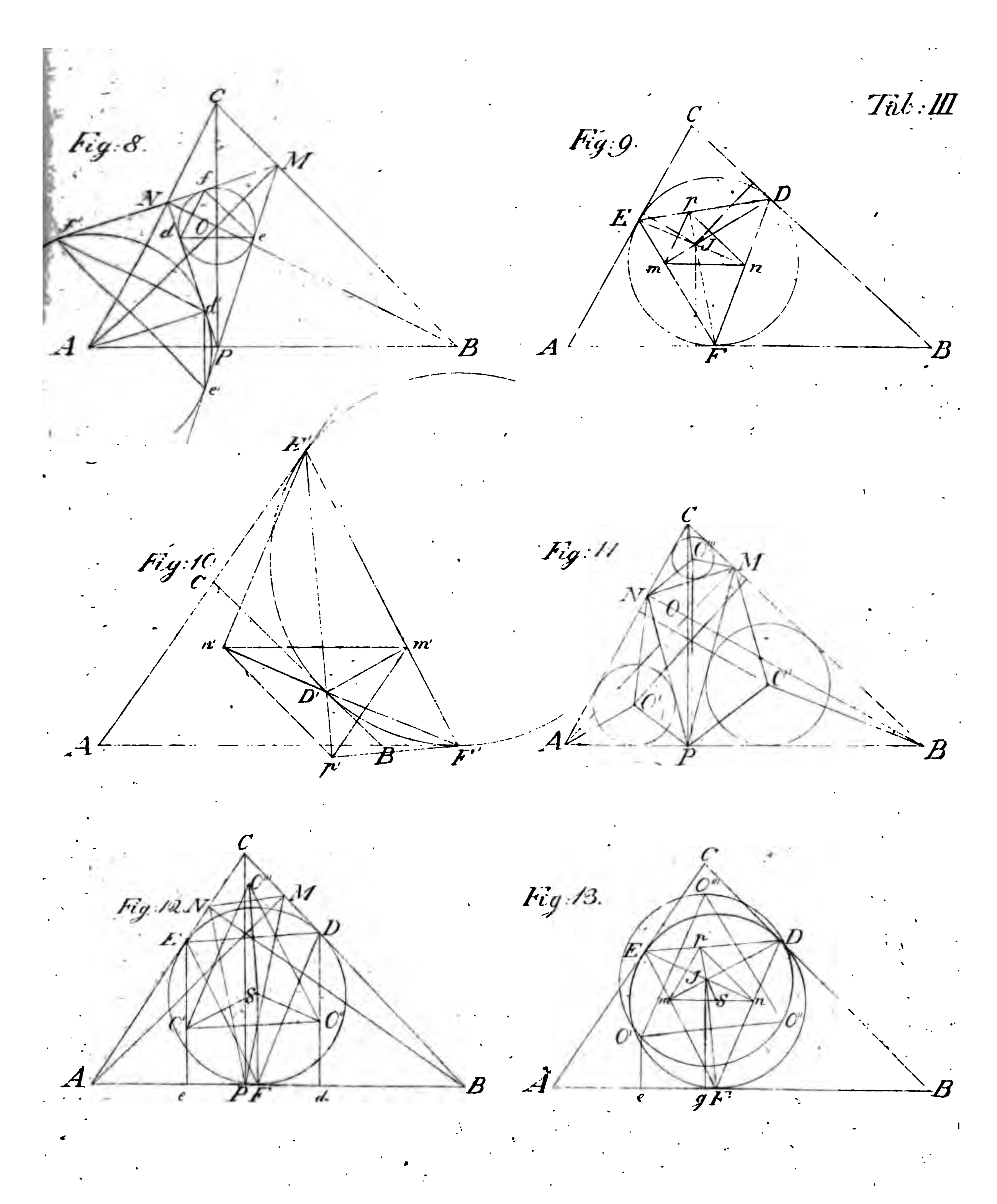
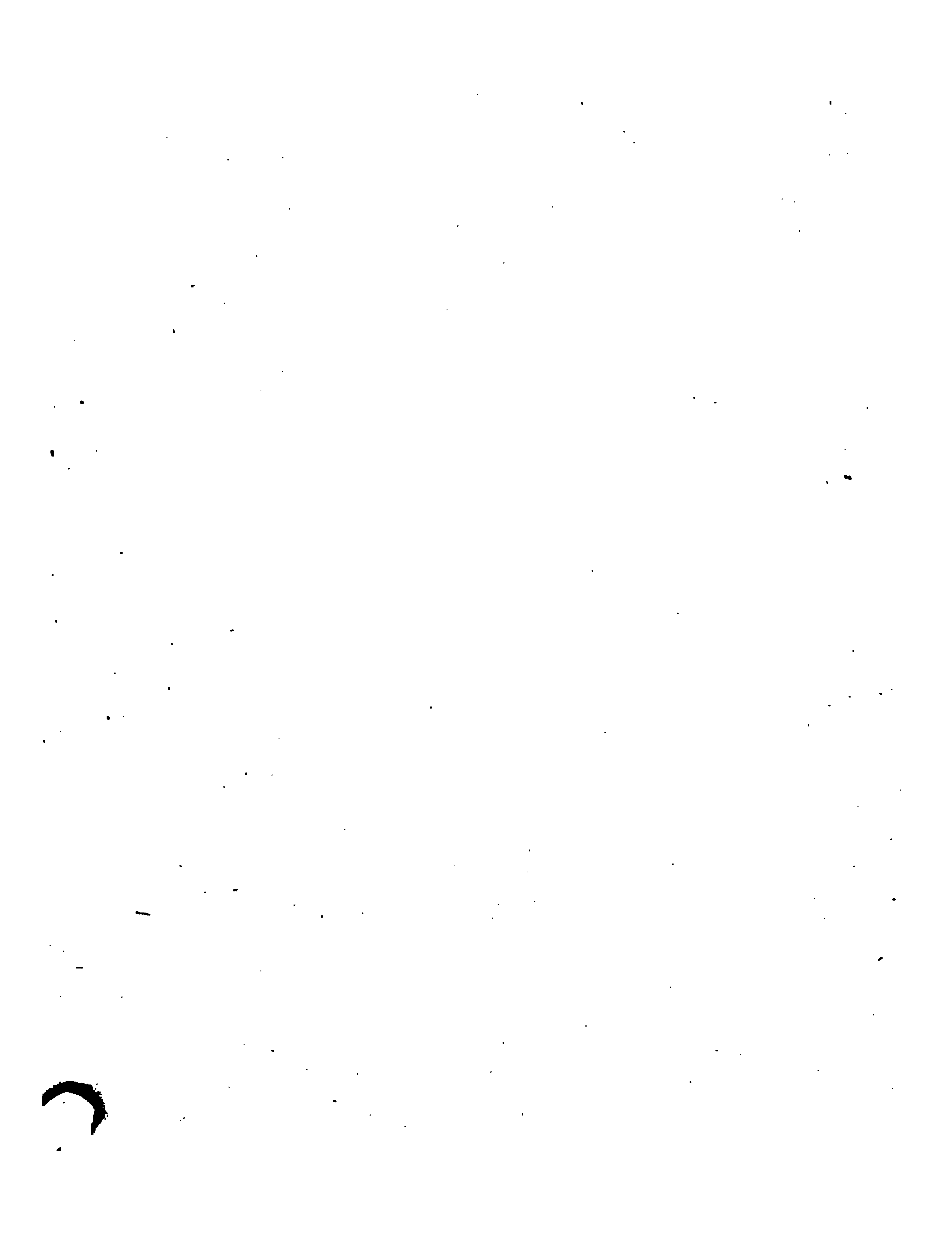

Tab:
Fig 1
Fig:3
Fig:5
Fig:6

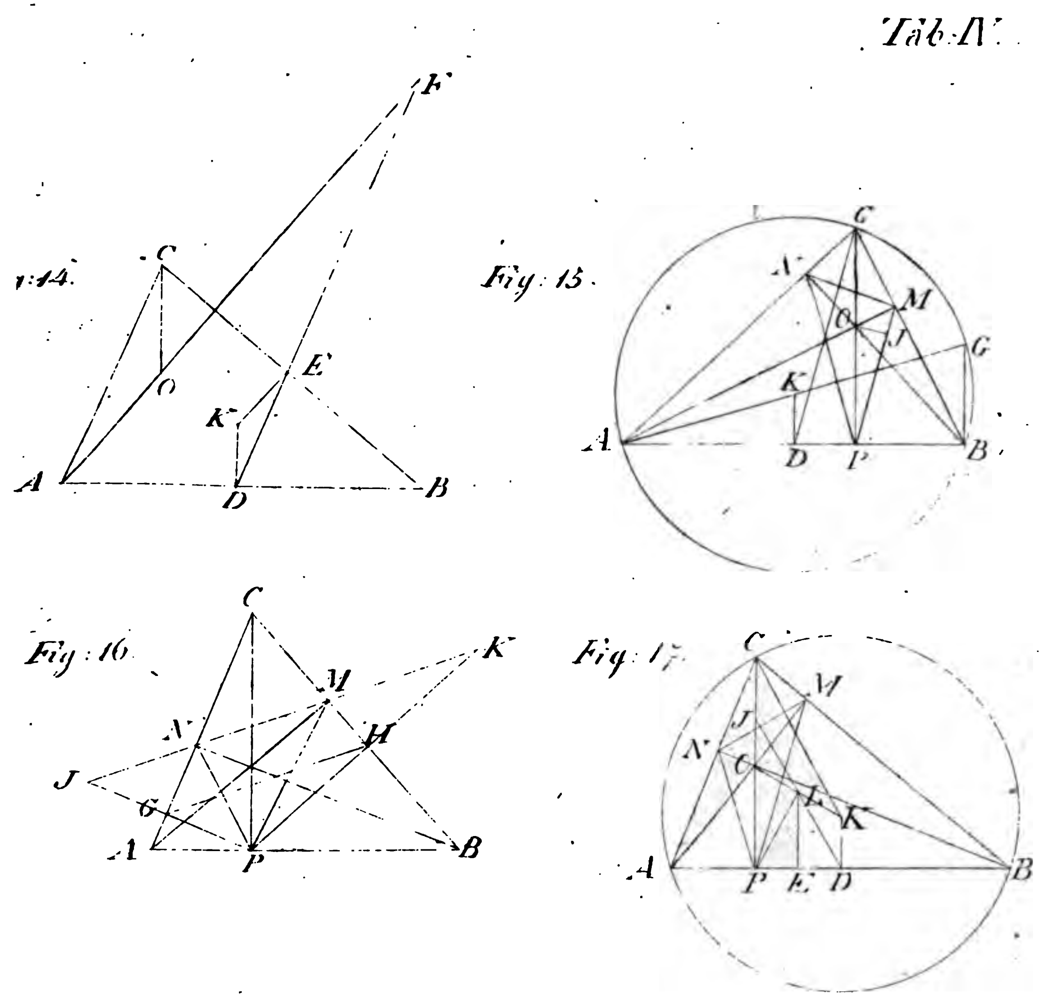
Fig. 7

C M N O H L S G K A P F f c B S' S'' S



Tab: III
Fig: 8.
C
M
N
f
O
d
e
A
P
B
e'
Fig: 9.
C
D
E
r
J
m
n
A
F
B
Fig: 10.
E'
C
n'
m'
D'
A
p'
B
F'
Fig: 11
C
O'''
M
N
O
O'
O''
A
P
B
Fig: 12.
C
O'''
N
M
E
D
S
O'
O''
A
e
P
F
d
B
Fig: 13.
C
O'''
E
D
r
J
m
S
n
O'
O''
A
e
g
F
B





Tab. IV.
Fig: 14.
F
C
E
O
K
A
D
B
Fig: 15.
C
N
M
O
J
G
K
A
D
P
B
Fig: 16.
C
K
M
N
H
J
G
A
P
B
Fig: 17.
C
M
J
N
O
L
K
A
P
E
D
B

